



UNIwersytet Marii Curie - Skłodowskiej
w Lublinie

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki

Bartłomiej Mrysz

Nr albumu: 1832759

SOLITONY I FALE NIELINIOWE

Solitons and Nonlinear Waves

Kierunek: Fizyka

Specjalizacja: Fizyka Komputerowa

Praca magisterska napisana
pod kierunkiem naukowym
prof. dr hab. K. Murawskiego

Lublin 2010

*Składam podziękowania
prof. dr hab. Krzysztofowi Murawskiemu
za cierpliwość, poświęcony czas
oraz cenne uwagi podczas pisania pracy.*

Spis treści

Wstęp	6
Cel i zakres pracy	8
1 Fale solitonowe	10
1.1 Definicja i odkrycie solitonów	10
1.2 Modelowe równania solitonowe	12
1.3 Dyspersja	12
1.4 Nieliniowość	13
1.5 Rozwiązania równań solitonowych	15
1.6 Wyprowadzenie równania KdV	18
2 Matematyczne metody rozwiązywania równania KdV	22
2.1 Pary Laxa	22
2.2 Metoda Hiroty	23
2.3 Transformacja Bäcklunda	27
2.4 Problem rozpraszania i problem rozpraszania wstecznego	29
3 Metody numeryczne w fizyce	34
3.1 Klasyfikacja równań różniczkowych cząstkowych	34
3.2 Siatka numeryczna	35
3.3 Wybrane schematy numeryczne	37
3.4 Analiza stabilności schematów	40
3.5 Przykład symulacji : równanie sinus - Gordona	41
4 Badania własne: Numeryczna symulacja rozwiązania równania KdV	45
4.1 Krótka charakterystyka języka Fortran i biblioteki OpenGL	45
4.2 Program „Symulacja równania KdV”	46
4.3 Dyspersja i nieliniowość	48
4.4 Powstanie solitonu	51
4.5 Kolizje solitonów	52
4.6 Problem FPU	55

Podsumowanie

57

Bibliografia

59

Wstęp

Fizyka fal to dziedzina obejmująca szeroki zakres zagadnień. Wśród nich znajdują się zaburzenia nieliniowe, które opisane są za pomocą nieliniowych równań różniczkowych. Fala nieliniowa charakteryzuje się tym, że nie spełnia zasady superpozycji i prędkość jej rozchodzenia zależy od amplitudy. Z tego typu zjawiskiem spotkał się John Scott Russel w 1834 roku podczas projektowania kanału wodnego Union Canal w Wielkiej Brytanii. Russel nazwał swoje odkrycie solitonem, co oznacza „samotną falę” i w ten sposób zapoczątkował fizykę solitonów.

Podstawy matematyczne do opisu tego zaburzenia wnieśli tacy fizycy Diederik Korteweg i Gustav de Vries, którzy w 1895 roku wyprowadzili równanie opisujące solitony. Analiza tego równania pozwoliła znaleźć przyczynę ich powstawania oraz umożliwiła zbadanie podstawowych właściwości. Okazało się, że za istnienie tych fal odpowiada nieliniowość i dyspersja. Od tamtej pory zaczęto odkrywać solitony w wielu układach fizycznych takich jak fale na wodzie (Rysunek 1), plazma słoneczna, kondensat Bosego - Einsteina czy też linia światłowodowa.

Badania nad tymi falami przyczyniły się także do opracowania nowych metod rozwiązywania nieliniowych równań różniczkowych, w tym Wstecznej Transformacji Rozpraszania. Metoda ta pozwoliła znaleźć rozwiązanie zależne od czasu w oparciu o równanie Schrödingera oraz współczynniki rozpraszania. Solitony pojawiają się także w doświadczeniach numerycznych niemal od początku istnienia komputerów. Pierwsza symulacja została przeprowadzona już w latach 50 ubiegłego wieku przez Enrico Fermiego, Johna Pasty i Stanisława Ulama.

Oprócz klasycznego solitonu będącego rozwiązaniem równania Kortewega - de Vriesa, występuje on także pod inną postacią, na przykład jako kink lub antykink soliton, który został po raz pierwszy zaobserwowany przy projektowaniu linii przesyłowych. Ten typ solitonu jest opisany przez równanie sinus-Gordona, które wraz z równaniem Kortewega - de Vriesa i nieliniowym równaniem Schrödingera stanowi jedno z trzech podstawowych równań solitonowych. W każdym procesie fizycznym opisanym przez te równania występują też solitony, dlatego są one spotykane w tak różnorodnych zjawiskach fizycznych.



Rysunek 1: Soliton w akwedukcie Scotta Russella przy Union Canal w Edynburgu. Zdjęcie zostało zrobione w czasie konferencji naukowej w 12 lipca 1995 roku.

Cel i zakres pracy

Celem niniejszej pracy jest zapoznanie czytelnika z pojęciem solitonu. W rozdziale pierwszym opiszę krótką historię odkrycia tego zjawiska oraz przedstawię równania, którego rozwiązaniem jest soliton.

W rozdziale drugim zaprezentuję trzy sposoby analitycznego rozwiązywania równania Kortewega - de Vriesa, w tym metodę umożliwiającą skonstruowanie rozwiązania wielosolitonowego. Przedstawię także ideę Wstecznej Transformacji Rozpraszania, będącej metodą umożliwiającą rozwiązanie nieliniowych równań różniczkowych.

Rozdział trzeci skupia się na numerycznych metodach obliczeniowych, w tym na schematach numerycznych równań hiperbolicznych. Opiszę także symulację numerycznego rozwiązania równania sinus - Gordona.

Czwarty rozdział dotyczy badań własnych i zawiera opis przeprowadzenia symulacji numerycznej równania Kortewega - de Vriesa. Przedstawię w nim analizę powstawania solitonu oraz ich kolizję między sobą. Na koniec przeprowadzę eksperyment numeryczny Fermiego, Pasty i Ulama.

Rozdział 1

Fale solitonowe

1.1 Definicja i odkrycie solitonów

Solitonem (ang. soliton wave) nazywamy falę, która opisywana jest funkcją, będącą rozwiązaniem równania różniczkowego lub układu takich równań. Fala ta, oddziałując z innymi solitonami, asymptotycznie (dla czasów nieskończonych) zachowuje swoją formę i prędkość. Jedynym efektem takiego oddziaływania mogą być przesunięcia solitonów w przestrzeni. Nazwa soliton pochodzi od jego częstego występowania w przyrodzie pod postacią pojedynczego, zlokalizowanego impulsu.

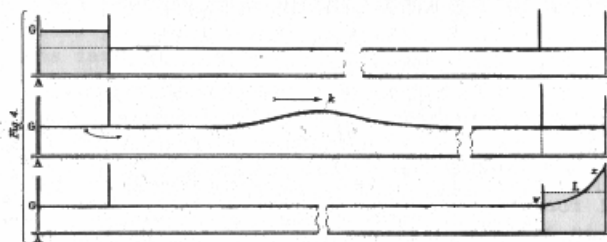
Pierwszym zarejestrowanym obserwatorem solitonu był szkocki inżynier John Scott Russel. W roku 1834 zaobserwował zaburzenie, które wytworzyło się wokół dziobu łodzi w kanale wodnym Union Canal, w Wielkiej Brytanii. Russel zaintrygowany falą gonił ją przez pewien czas, aż ta dotarła do ujścia kanału. Opisał to zdarzenie w „Report on Waves” (ang. Sprawozdanie o falach) podczas czternastego spotkania Brytyjskiego Królewskiego Towarzystwa Naukowego, we wrześniu 1844 roku [15]:

Obserwowałem ruch łodzi, którą ciągnęły szybko w wysokim kanale konie, gdy nagle się zatrzymały; wprowadzona w ruch masa wody zgromadziła się wokół dzioba łodzi w stanie zburzonym. Wtedy niespodziewanie potoczyła się z dużą prędkością w postaci dużego pojedynczego wzniesienia: okrągły, gładki, wyraźny garb wodny poruszał się w kanale, bez widocznej zmiany kształtu i zmniejszenia prędkości. Pojechałem za nim i dogoniłem, gdy jeszcze się poruszał z prędkością około 8 lub 9 mil na godzinę, zachowując początkowy kształt około 30 stóp długości i około półtorej stopy wysokości. Jego wysokość stopniowo się zmniejszała i po przejechaniu za nim jednej lub dwóch mili zgubiłem go przy ujściu kanału. Tak w sierpniu 1834r. nastąpiło moje pierwsze przypadkowe spotkanie z tym niezwykłym, przepięknym zjawiskiem ...

Zaobserwowany soliton został nazwany przez Russela „Wave of Translation”, czyli *fala przesunięcia*. Młody inżynier w celu dokładniejszego zbadania tego zjawiska, zbudował niewielki zbiornik na tyłach swojego ogrodu i za pomocą 30 funtowego ciężarka zaczął wytwarzać solitony (Rysunek 1.1) [15]. Z obserwacji wysunął dwa ważne wnioski. Po pierwsze kwadrat prędkości fali solitonowej jest wprost proporcjonalny do jej amplitudy:

$$v^2 = g(h + A) \quad (1.1)$$

gdzie g to przyspieszenie ziemskie, h jest głębokością ośrodka, a A to amplituda. Po drugie soliton jest falą grawitacyjną.



Scott Russell's Figure 4.

Rysunek 1.1: Doświadczenie wykonane przez Johna Scotta Russela na tyłach swojego ogrodu. Solitony wytwarzane są w zbiorniku wypełnionym wodą, na który zrzucany jest ciężarek.

Kolejny krok na drodze do opisu solitonów uczyniło dwóch fizyków: J. Boussinesq (1871) oraz Lord Rayleigh'a (1876). Na podstawie analizy równań ruchu nieściśliwej, nielepkiej cieczy wyznaczyli profil solitonu [14]. Zgodnie z ich wyliczeniami jest on dany wzorem:

$$u(x, t) = a \cdot \operatorname{sech}^2(\beta(x - ct)) \quad (1.2)$$

gdzie współczynnik $\beta = 2h\sqrt{\frac{3a}{a+h}}$, a jest amplitudą fali, przy czym należy założyć, że jest ona dużo mniejsza od głębokości ośrodka.

Poprawny, matematyczny opis solitonów uzyskali dopiero Diederik Korteweg i Gustaw de Vries w 1895 roku [12] za pomocą równania nazwanego od ich nazwisk równaniem Kortewega - de Vriesa lub w skrócie równaniem KdV:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{3}{2} \left(\frac{g}{h}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} \epsilon \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \quad (1.3)$$

Parametr σ jest funkcją napięcia powierzchniowego T , gęstości cieczy ρ oraz głębokości, daną następującym wzorem:

$$\sigma = \frac{1}{3} h^3 - \frac{Th}{\rho g} \quad (1.4)$$

Równanie KdV jest nieliniowo - dyspersyjnym równaniem różniczkowym. Wzajemne oddziaływanie nieliniowości z dyspersją jest odpowiedzialne za właściwości solitonów. W przeciwieństwie do fal liniowych dwa nałożone ze sobą solitony nie wygaszają się wzajemnie, ani się nie wzmacniają.

Najczęściej spotykaną postacią równania KdV w literaturze jest:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.5)$$

Powstaje ona poprzez odpowiednią transformację współrzędnych x , u , dzięki której wielkości fizyczne występujące w równaniu (1.3) redukują się.

1.2 Modelowe równania solitonowe

Do rodziny równań opisujących solitony zaliczamy *równanie sinus-Gordona* (1.6) oraz *nieliniowe równanie Schrödingera* (1.7):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0 \quad (1.6)$$

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta |u|^2 u = 0 \quad (1.7)$$

Pierwsze [6] z nich opisuje dynamikę wielu układów skondensowanej materii takich jak: jednowymiarowy ferromagnetyk z płaską anizotropią w obecności prostopadłego pola magnetycznego, dynamika spinu nadciekłego helu ^3He oraz linie transmisyjne Josephsona. Jego rozwiązaniem jest tak zwany kink-anty-kink (ang. kink - skręt, węzeł) soliton w przypadku fali jednosolitonowej oraz breather, breather-kink soliton w przypadku fali wielosolitonowej.

Drugie równanie przedstawia ruch solitonów w światłowodach będący złożeniem dwóch efektów - dyspersji ośrodka oraz nieliniowości wynikającej z efektu optycznego Kerra. W optyce klasycznej współczynnik załamania światła n_0 zależy liniowo od natężenia pola elektrycznego \vec{E} . Jest to spowodowane tym, że fala elektromagnetyczna o małym natężeniu nie wpływa znacząco na strukturę wewnątrzatomową. W przypadku dużego natężenia pola, fale elektromagnetyczne wpływają na orbity elektronowe. Wtedy współczynnik załamania światła zmienia się nieliniowo zgodnie ze wzorem:

$$n = n_0 + n_1 |E|^2 \quad (1.8)$$

gdzie n jest współczynnikiem załamania światła na które padło promieniowanie o dużym natężeniu, n_1 to stała zależna od materiału ośrodka. Ten efekt nazywamy optycznym zjawiskiem Kerra. Występuje on w przypadku, gdy w materiale propaguje światło o natężeniu rzędu 10^7 [W]. Dzięki zastosowaniu solitonów w telekomunikacji światłowodowej w 1998 roku Thierry Jones z zespołem badawczym France Telecom zademonstrowali przesył informacji o prędkości 1 Tb/s.

1.3 Dyspersja

Dyspersja jest to zależność prędkości fazowej od częstotliwości fali. Fale dyspersyjne charakteryzują się tym, że ich prędkość fazowa ma inną wartość niż prędkość

grupowa. Prędkość fazowa jest to prędkość dwóch punktów fali o tej samej fazie i w ogólnej postaci jest ona równa:

$$c_f = \frac{\omega}{k} \quad (1.9)$$

gdzie $\omega = \omega(k)$ jest częstością kołową, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ to liczba falowa, λ - długość fali. Mnożąc obustronnie k we wzorze (1.9), otrzymamy $\omega(k) = c_f k$ czyli *związek dyspersyjny*. Następnie różniczkując go obustronnie względem k dostaniemy:

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{dc_f}{dk} k + c_f \quad (1.10)$$

Lewą stronę tego równania nazywamy prędkością grupową c_g , równą prędkości rozchodzenia się energii fali. Wyrażając liczbę falową k za pomocą długości fali, wzór (1.10) sprowadzi się do:

$$c_g = c_f - \lambda \frac{\partial c_f}{\partial \lambda} \quad (1.11)$$

Z powyższego równania wynika, że jeśli prędkość fazowa zależy od długości fali to jest ona różna od prędkości grupowej. Dla przykładu rozważmy równanie:

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.12)$$

i poszukajmy rozwiązania w postaci fali harmoniczej:

$$u(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} \quad (1.13)$$

Wstawiając wyrażenie (1.13) do (1.12) otrzymamy związek dyspersyjny:

$$\omega(k) = k - k^3 \quad (1.14)$$

Stąd możemy wyznaczyć prędkość fazową oraz grupową fali:

$$c_f = \frac{\omega}{k} = 1 - k^2 \quad (1.15)$$

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 1 - 3k^2 \quad (1.16)$$

Z powyższych wzorów wynika, że prędkość fazowa jak i grupowa zależy od liczby falowej. Gdyby usunąć z równania (1.12) człon u_{xxx} , wtedy otrzymalibyśmy równość w postaci $c_g = c_f$. Stąd wniosek, że obecność członu u_{xxx} w równaniu (1.12) przekształca zwykłą falę w falę dyspersyjną.

1.4 Nieliniowość

Nieliniowość jest to jedna z cech równań różniczkowych. Równanie nieliniowe, w przeciwieństwie do równania liniowego, nie spełnia zasady superpozycji. Oznacza to, że liniowa kombinacja dwóch lub więcej rozwiązań nie jest rozwiązaniem. Rozpatrzmy równanie D'Alemberta:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (1.17)$$

Jest to prosty przykład równania liniowego. Ogólną postacią rozwiązania (1.17) jest zaburzenie opisane wzorem:

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (1.18)$$

Funkcje f i g są dowolne. Pierwsza z nich opisuje impuls poruszający się w prawo z prędkością c , druga impuls poruszający się w przeciwnym kierunku. Oba impulsy nie kolidują ze sobą oraz nie zmieniają kształtu w czasie propagacji, co jest charakterystyczne dla fal liniowych.

Inaczej zachowują się fale opisane równaniami nieliniowymi. Rozważmy sobie nielepkie równanie Burgersa:

$$u_t + \alpha uu_x = 0 \quad (1.19)$$

Porównując (1.19) do równania adwekcji $u_t + cu_x = 0$ można stwierdzić, że różnią się one tylko wyrazem stojącym przy pochodnej przestrzennej. Jeśli przyjąć, że u oznacza amplitudę to prędkość fali opisanej równaniem (1.19) przyjmuje postać:

$$c = \alpha u \quad (1.20)$$

Z powyższego wzoru można wyciągnąć prosty wniosek, że *im większa amplituda fali nieliniowej, tym większa jej prędkość*. Ogólnym rozwiązaniem równania Burgersa jest zaburzenie opisane wzorem:

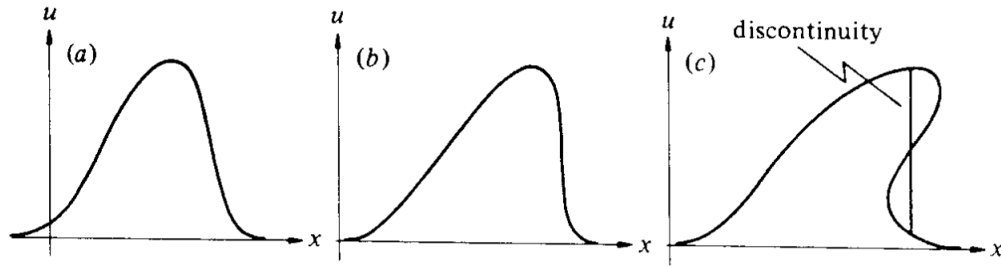
$$u(x, t) = f(x - \alpha u(x, t)t) \quad (1.21)$$

Fala opisana powyższym rozwiązaniem w przeciwieństwie do fali linowej, może zmieniać kształt podczas propagacji. Zgodnie ze wzorem (1.20) grzbiet fali będzie poruszał się szybciej niż dolina fali i profil zaczynie przypominać kształt tzw. "morskich bałwanów" (Rysunek 1.2 [1]).

Oprócz równań nieliniowych i dyspersyjnych istnieje jeszcze trzeci rodzaj, będący połączeniem dwóch pierwszych. Są to równania nieliniowo-dyspersyjne, czyli takie w których występują wyrażenia odpowiedzialne za efekty nieliniowości i dyspersji. Wcześniej wspomnieliśmy, że za dyspersję odpowiedzialny jest człon u_{xxx} zaś w równaniu Burgersa (1.19) człon αuu_x odpowiada za nieliniowość. Zatem najprostszym przykładem równania nieliniowo-dyspersyjnego będzie:

$$u_t + \alpha uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.22)$$

Podstawiając $\alpha = 6$ otrzymamy równanie Kortewega - de Vriesa w postaci kanonicznej.



Rysunek 1.2: Ewolucja fali nieliniowej w trzech kolejnych odstępach czasu. Na ilustracji po lewej (a) nieliniowość nieznacznie wpływa na profil fali. Po upływie pewnego czasu (b) w skutek działania nieliniowości profil zaczyna być stromy z jednej strony, aż w wyniku różnicy prędkości pomiędzy grzbietem i doliną fali, kształt zaczyna przypominać tak zwane "morskie bałwany" (c).

1.5 Rozwiązania równań solitonowych

Równania solitonowe są równaniami nieliniowymi i nie spełniają zasady superpozycji. Ponadto nie można przedstawić ich ogólnego rozwiązania w postaci (1.18), co oznacza, że nie może mieć ono dowolnego profilu opisanego równaniem $u(x, 0) = f(x)$. Na przykład Bussinesq i Rayleigh pokazali, że profil fal solitonowych jest opisany ścisłym wzorem, który jednak nie opisywał dobrze właściwości solitonów, gdyż amplituda w ich rozwiązaniu nie zależała od prędkości. Poprawny wynik można uzyskać rozwiązując równanie KdV. W tym celu konieczne jest przedstawienie rozwiązania jako fali poruszającej się z prędkością c w prawo, czyli trzeba dokonać podstawienia $\xi = x - ct$, gdzie ξ jest nową współrzędną. Pochodne cząstkowe ξ względem x i t są równe:

$$\xi_x = 1 \quad (1.23)$$

$$\xi_t = -c \quad (1.24)$$

Podstawiając $u(x, t) = z(\xi)$ oraz wstawiając (1.23) i (1.24) do równania Kortewega - de Vriesa otrzymamy:

$$-cz\xi + 6zz\xi + z\xi\xi\xi = 0 \quad (1.25)$$

Następnie mnożąc i całkując obustronnie równanie (1.25) przez $d\xi$ dostaniemy:

$$-cz + 3z^2 + z\xi\xi = C_1 \quad (1.26)$$

gdzie C_1 jest stałą całkowania. Kolejnym etapem będzie pomnożenie równania przez dz , a następnie scałkowanie obustronnie:

$$-cz^2 + z^3 + \frac{1}{2}z\xi^2 = C_1z + C_2 \quad (1.27)$$

przy czym C_2 to kolejna stała całkowania. Zakładamy, że dla $x \rightarrow \pm\infty$, funkcja z i jej pochodne dążą do 0. Z tak dobranych warunków otrzymamy $C_1 = C_2 = 0$. W przypadku, gdy $C_1, C_2 \neq 0$, rozwiązanie (1.25) wyraża się za pomocą całek eliptycznych. Gdy $C_1 = C_2 = 0$ równanie (1.27) sprowadzi się do:

$$z_\xi^2 = z^2(c - 2z) \quad (1.28)$$

Rozdzielając zmienne dostaniemy:

$$\frac{dz}{z\sqrt{c-2z}} = d\xi \quad (1.29)$$

Aby można było scałkować wyrażenie (1.29) trzeba dokonać następującego podstawienia:

$$z = \frac{1}{2}c \cdot \operatorname{sech}^2 w \quad (1.30)$$

gdzie w jest nową zmienną. Dokonując transformacji odpowiednich wyrażeń otrzymamy:

$$c - 2z = c(1 - \operatorname{sech}^2 w) = c \operatorname{tgh}^2 w \quad (1.31)$$

Następnie używając relacji $\cosh^2 w - \sinh^2 w = 1$ można wyznaczyć pochodną wielkości (1.30) względem w :

$$\frac{dz}{dw} = -c \frac{\sinh w}{\cosh^3 w} \quad (1.32)$$

Ze wzoru (1.32) uzyskamy:

$$w = \operatorname{arcsech} \sqrt{\frac{2z}{c}} \quad (1.33)$$

Korzystając z (1.30), (1.31), (1.32) i wstawiając je do (1.29) otrzymamy:

$$\xi = -\frac{2}{\sqrt{c}}w \quad (1.34)$$

Wstawiając (1.33) do (1.34) dostaniemy:

$$\xi = -\frac{2}{\sqrt{c}} \cdot \operatorname{arcsech} \sqrt{\frac{2z}{c}} \quad (1.35)$$

$$z = \frac{c}{2} \cdot \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{c}{2}} \xi \right) \quad (1.36)$$

Powracając do współrzędnych (x,t) otrzymamy ostatecznie:

$$u(x,t) = \frac{c}{2} \cdot \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{c}{2}}(x - ct) \right) \quad (1.37)$$

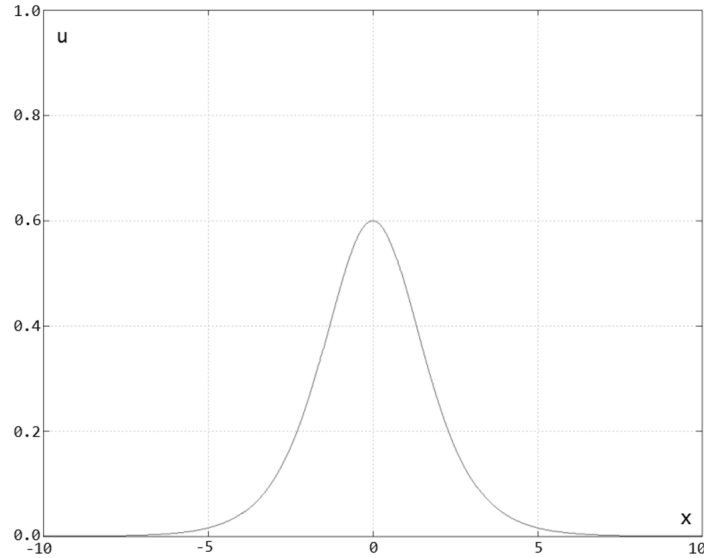
W prawidłowym rozwiązaniu równania KdV amplituda zależy liniowo od prędkości, przy czym $c > 0$. Oznacza to, że rozwiązanie (1.37) opisuje impuls (Rysunek 1.3) poruszający się tylko w prawą stronę.

Równanie sinus - Gordona [6] jest nieliniowym równaniem różniczkowym o postaci:

$$\nabla^2 u - u_{tt} + \sin u = 0 \quad (1.38)$$

Członem nieliniowym w równaniu (1.38) jest funkcja $\sin u$. Gdy amplituda zaburzenia jest niewielka, można przyjąć, że $\sin u \approx u$ i równanie sinus - Gordona sprowadza się do równania Kleina - Gordona:

$$\nabla^2 u - u_{tt} + u = 0 \quad (1.39)$$



Rysunek 1.3: Profil fali solitonowej o równaniu $u(x, 0) = 0.6 \cdot \text{sech}^2(x)$, będącej rozwiązaniem równania KdV.

które jest równaniem różniczkowym liniowym. Oznacza to, że dla małych amplitud efekty nieliniowe można zaniedbać. Rozważania nad rozwiązaniem równania sinus - Gordona ograniczą się tylko do jednego wymiaru, stąd będziemy mieli $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Należy także uwzględnić, że $u(x, t)$ będzie reprezentowało falę poruszającą się w prawo z prędkością c , więc ogólne rozwiązanie będzie miało postać $u(x, t) = u(x - ct) = u(\xi)$, gdzie ξ jest nową zmienną. Stąd równanie sinus - Gordona w nowych zmiennych przekształci się do:

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \sin u = 0 \quad (1.40)$$

Mnożąc obustronnie przez du i całkując otrzymamy:

$$\frac{1}{2}(c^2 - 1) \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 - \cos u = C \quad (1.41)$$

gdzie C jest dowolną stałą całkowania. Zakładamy, że w nieskończoności nie ma zaburzenia, więc dla $z \rightarrow \infty$ funkcja $u(\xi)$ i $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ dążą do zera. Wynika z tego, że stała $C = -1$. Przekształcając wyrażenie (1.41) otrzymamy:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 = \frac{2}{1 - c^2} (1 - \cos u) \quad (1.42)$$

Korzystając z relacji $1 - \cos u = 2 \sin^2 \frac{u}{2}$ i pierwiastkując obustronnie równanie (1.42) dostaniemy:

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{2}{\sqrt{1 - c^2}} \sin \frac{u}{2} \quad (1.43)$$

Rozdzielając zmienne i całkując obustronnie, równanie (1.43) sprowadzi się do:

$$2 \ln \left| \text{tg} \frac{u}{4} \right| = \frac{2\xi}{\sqrt{1 - c^2}} \quad (1.44)$$

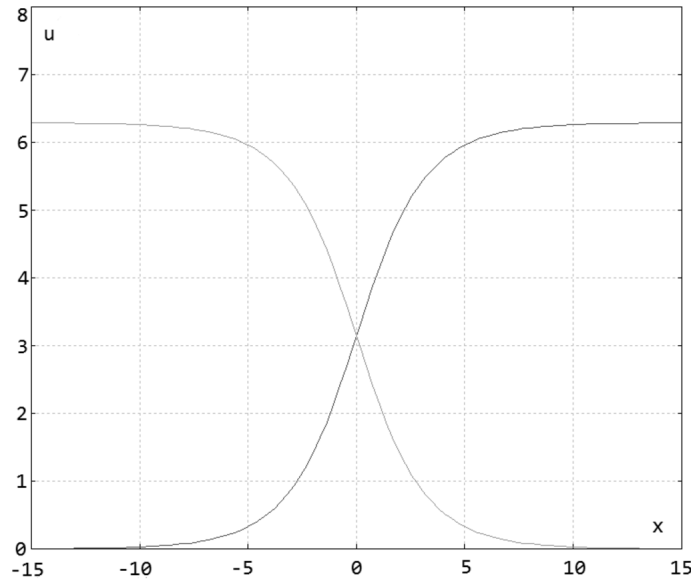
Stąd wyznaczając $u(\xi)$ otrzymamy:

$$u(\xi) = 4 \operatorname{arc\,tg} \left[\exp \left(\frac{\pm \xi}{\sqrt{1 - c^2}} \right) \right] \quad (1.45)$$

Wracając do współrzędnych x i t uzyskamy rozwiązanie równania sinus - Gordona:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arc\,tg} \left[\exp \left(\frac{\pm(x - ct)}{\sqrt{1 - c^2}} \right) \right] \quad (1.46)$$

Profil fali solitonowej będącej rozwiązaniem równania sinus - Gordona przedstawia rysunek (1.4). Prędkość zaburzenia zawiera się w przedziale $-1 < c < 1$. Równanie sinus - Gordona posiada dwa rozwiązania w zależności od znaku stojącego przy funkcji *exponens* we wzorze (1.46). Rozwiązanie ze znakiem ujemnym jest nazywane kink soliton, ze znakiem dodatnim antykink soliton.



Rysunek 1.4: Rozwiązanie równania sinus - Gordona: kink - linia rosnąca w kierunku ujemnych wartości x i antykink - linia rosnąca w kierunku dodatnich wartości x .

1.6 Wyprowadzenie równania KdV

Do wyprowadzenia równania KdV potrzebny jest pewien układ, w którym pojawi się dyspersja. Aby można było to osiągnąć, należy dodać do niego charakterystyczną przestrzenną skalę. Można to zrobić poprzez dodanie do układu jakiegoś fizycznego efektu, na przykład grawitacji lub poprzez wprowadzenie ograniczenia w postaci ośrodka stałego. Poniższe wyprowadzenie [9] opiera się na takim układzie. W tym przypadku charakterystyczną skalą, wprowadzającą dyspersję jest ograniczenie w postaci cylindra. Rozpatrzmy zatem równania dla cieczy ograniczonej cylindrem [10]:

$$A_t + Av_x = 0 \quad (1.47)$$

$$v_t + vv_x = -\frac{1}{\rho_0}p_x \quad (1.48)$$

$$A_{tt} + \frac{E}{\rho_m a^2} (A - \pi a^2) = \frac{2\pi a}{\rho_m h} p \quad (1.49)$$

gdzie A jest polem przekroju cylindra, a jest stałym promieniem, h to grubość ścianki cylindra, ρ_m jest gęstością masy materiału cylindra, E - moduł Younga, v - prędkość cieczy, ρ_0 jest stałą gęstością cieczy a p jest ciśnieniem. Symbol t oznacza czas, natomiast x dystans wzdłuż osi cylindra. Następnym krokiem będzie zlinearyzowanie równań (1.47) oraz (1.49) poprzez dodanie rozszerzenia do prędkości oraz pola przekroju:

$$A = \pi a^2 + \delta a \quad (1.50)$$

$$v = \delta v \quad (1.51)$$

otrzymując w ten sposób równanie różniczkowe z członem dyspersyjnym A_{xxtt} :

$$\delta A_{tt} - \frac{hE}{2\rho_0 a} \delta A_{xx} = \frac{\rho_m h a}{2\rho_0} \delta A_{xxtt} \quad (1.52)$$

Porównując równanie (1.52) z równaniem falowym otrzymamy wzór na prędkość fali:

$$c = \sqrt{\frac{Eh}{2\rho_0 a}} \quad (1.53)$$

Wstawiając wzór na falę harmoniczną (1.13) do równania (1.52) otrzymamy związek dyspersyjny:

$$\omega(k) = \frac{ck}{\sqrt{1 + \frac{\rho_m ah}{2\rho_0} k^2}} \quad (1.54)$$

Prędkość fazowa fali $c(k) = \frac{\omega}{k}$ jest zależna od k co oznacza, że naszym układzie występuje dyspersja.

W kolejnym etapie w celu lepszej przejrzystości równań, zapiszmy niektóre wielkości za pomocą primowanych odpowiedników. Niech $A = \pi a^2 A'$, $p = \frac{Eh}{2a} p'$, $v = \frac{l}{T} v'$, $x = lx'$, $t = Tt'$, gdzie $l = \sqrt{\frac{ah\rho_m}{2\rho_0}}$ oraz $T = \sqrt{\frac{\rho_m}{E}} a$. Zapisując równania (1.47), (1.48) oraz (1.49) w nowych jednostkach otrzymamy:

$$A'_{t'} + (A'v')_{x'} = 0 \quad (1.55)$$

$$v'_{t'} + v'v'_{x'} = -p'_{x'} \quad (1.56)$$

$$A'_{t't'} + A' = p' + 1 \quad (1.57)$$

Następnie wyeliminujmy ciśnienie i zdefiniujmy potencjał prędkości $v = \psi_x$. Dopiszmy go do równań (1.55) i (1.57) opuszczając znaki prim otrzymamy:

$$A_t + A_x \psi_x + A \psi_{xx} = 0 \quad (1.58)$$

$$\psi_t + \frac{1}{2} \psi_{xx} + A_{tt} + A = 1 \quad (1.59)$$

Zapiszmy lagranżjan dla tych równań:

$$L = \frac{1}{2}A\psi_x^2 + A\psi_t - \frac{1}{2}A_t^2 + \frac{1}{2}(A-1)^2 \quad (1.60)$$

Następnie wprowadźmy do równań ruchomy układ odniesienia $\xi = \sqrt{(x-t)}$ i $\tau = \epsilon^{\frac{3}{2}}t$, gdzie ϵ jest małym parametrem, który określa słabość dyspersji. Jest to stosunek średnicy cylindra $2a$ do długości fali λ .

$$\epsilon = \frac{2a}{\lambda} \quad (1.61)$$

Następnie rozwińmy w szereg następujące wielkości:

$$A = 1 + \epsilon A_1 + \epsilon^2 A_2 + \dots \quad (1.62)$$

$$\sqrt{\epsilon}\psi = \epsilon\psi_1 + \epsilon^2\psi_2 + \dots \quad (1.63)$$

$$L = \epsilon L_1 + \epsilon^2 L_2 + \dots \quad (1.64)$$

W tym przypadku ϵ mierzy słabość nieliniowości. Zapiszmy lagranżjan L we współrzędnych ξ i τ :

$$L = \frac{1}{2}\epsilon A (\psi_\xi)^2 - \epsilon^{\frac{1}{2}}A\psi_\xi + \epsilon^{\frac{3}{2}}A\psi_\tau - \frac{1}{2}[\epsilon(A_\xi - \epsilon A_\tau)^2 + (A-1)^2] \quad (1.65)$$

Następnie pod A i pod ψ podstawmy wyrażenia (1.62) i (1.63) z dokładnością do pierwszego członu, czyli $A = 1 + \epsilon A_1$ oraz $\psi = \sqrt{\epsilon}\psi_1$. Wstawiając je do funkcji Lagrange'a (1.60) oraz odrzucając wyrazy z 4-tą i 5-tą potęgą przy epsilon otrzymamy następującą postać lagranżjanu:

$$L = -\epsilon\psi_\xi + \epsilon^2 \left(\frac{1}{2}\psi_\xi^2 + \psi_\tau - A_1\psi_\xi - \frac{1}{2}A_1^2 \right) + \epsilon^3 \left(\frac{1}{2}A_1\psi_\xi^2 + A_1\psi_\tau - \frac{1}{2}A_{1,\tau}^2 \right) \quad (1.66)$$

gdzie $A_{1,\tau} = \frac{\partial A_1}{\partial \tau}$. Porównując wyrażenia przy kolejnych potęgach ϵ z wyrażeniem (1.64) otrzymamy układ trzech równań:

$$L_1 = -\psi_{1,\xi} \quad (1.67)$$

$$L_2 = \frac{1}{2}\psi_{1,\xi}^2 + \psi_{1,\tau} - A_1\psi_{1,\xi} - \frac{1}{2}A_1^2 \quad (1.68)$$

$$L_3 = \frac{1}{2}A_1\psi_{1,\xi}^2 + A_1\psi_{1,\tau} - \frac{1}{2}A_{1,\tau}^2 \quad (1.69)$$

gdzie $\psi_{1,\xi} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi}$, $\psi_{1,\tau} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau}$.

Zastosujmy równania Eulera - Lagrange'a w postaci:

$$\frac{\delta L_i}{\delta A_1} = \frac{\partial L_i}{\partial A_1} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial L_i}{\partial A_{1,\xi}} = 0 \quad (1.70)$$

$$\frac{\delta L_i}{\delta \psi_1} = \frac{\partial L_i}{\partial \psi_1} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial L_i}{\partial \psi_{1,\xi}} = 0 \quad (1.71)$$

dla $i = 1, 2, 3$. Z równań $\frac{\delta L_2}{\delta A_1} = 0$ oraz $\frac{\delta L_2}{\delta \psi_1} = 0$ otrzymamy:

$$A_1 = \psi_{1,\xi} \quad (1.72)$$

Z równania $\frac{\delta L_3}{\delta \psi_1} = 0$ dostaniemy:

$$2\psi_{1,\xi\tau} + \frac{3}{2}(\psi_{1,\xi})_\xi + \psi_{1,\xi\xi\xi\xi} = 0 \quad (1.73)$$

Wracając do współrzędnych x i t otrzymamy równanie Kortewega - de Vriesa:

$$v_t + v_x + \frac{3}{2}vv_x + \frac{1}{2}v_{xxx} = 0 \quad (1.74)$$

Fizyka fal propagujących w cylindrycznych układach była już badana przez Thomasa Younga w 1808 roku, w modelu rozchodzenia się ciśnienia w naczyniach tętnicznych. Duży wkład w tą dziedzinę wnieśli także Moodie, Barclay oraz Tait. W 1983 roku została przez nich zaprezentowana teoria dla cienkiej tuby, a rok później przedstawiona została analiza propagacji ciśnienia tętniczego za pomocą modelu cienkiego elastycznego cylindra, który zawiera nielepłą i nieściśliwą ciecz.

Rozdział 2

Matematyczne metody rozwiązywania równania KdV

2.1 Pary Laxa

Parą Laxa nazywamy parę operatorów L , A zależnych od czasu, definiujących szereg równań różniczkowych. Pierwszy raz zostały one użyte przez Petera Laxa [16] do opisu solitonów w ośrodkach ciągłych.

W formalizmie Laxa, równania różniczkowe opisuje się za pomocą operatorów związanych ze sobą przy pomocy równania Laxa:

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [L, A] = 0 \quad (2.1)$$

Zarówno L i A są liniowymi operatorami, które funkcjonują na elementach z przestrzeni Hilberta H oraz zawierają w sobie pochodne przestrzenne. Stąd istnieje taka para $(\phi, \psi) \in H$, dla której spełniona jest równość $(L\phi, \psi) = (\phi, L\psi)$. Równanie własne operatora L ma postać:

$$L\psi = \lambda\psi \quad (2.2)$$

dla $t \geq 0$ i $-\infty < x < \infty$, gdzie λ jest *niezależną od czasu* wartością własną operatora L . Operator A opisuje ewolucję czasową funkcji ψ i jest z nią związany równaniem:

$$A\psi = \psi_t \quad (2.3)$$

Różniczkując pierwsze równanie (2.2) względem czasu otrzymamy [11]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(L\psi) = \frac{\partial L}{\partial t}\psi + L\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}\psi + LA\psi \quad (2.4)$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial t}(L\psi) = \frac{\partial}{\partial t}(\lambda\psi) = \lambda\psi_t = \lambda A\psi = A(\lambda\psi) = AL\psi \quad (2.5)$$

Ponieważ ψ jest dowolne, porównując ze sobą (2.4) i (2.5) otrzymamy równanie Laxa:

$$\frac{\partial L}{\partial t} + LA = AL \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} + [L, A] = 0 \quad (2.6)$$

Znajdowanie par Laxa dla konkretnego równania nie jest trywialne. Przykładem operatora L może być operator Sturm - Liouville'a:

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t) \quad (2.7)$$

W tym przypadku równanie własne (2.2) przekształci się w jednowymiarowe równanie Schrödingera. Jeśli przyjmiemy, że rozwiązanie u zmienia się zgodnie z równaniem Kortewega - de Vriesa to okazuje się, że wartości własne tego równania nie zmieniają się w czasie. Zakładając z góry jaką postać ma jeden z operatorów, znacznie łatwiej jest znaleźć formę drugiego dla konkretnego równania. W przypadku równania KdV para Laxa będzie dana przez [1]:

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u \quad (2.8)$$

$$A = 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3\left(u\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad (2.9)$$

Wstawiając oba operatory do równania Laxa (2.1) oraz uwzględniając $L_t = u_t$ otrzymamy:

$$u_t = -6uu_x + u_{xxx} \quad (2.10)$$

Za pomocą równania (2.1) można określić całą hierarchię równań różniczkowych, w tym hierarchię równania KdV poprzez określenie ogólniejszej formy operatora A . Jeśli zdefiniujemy A jako:

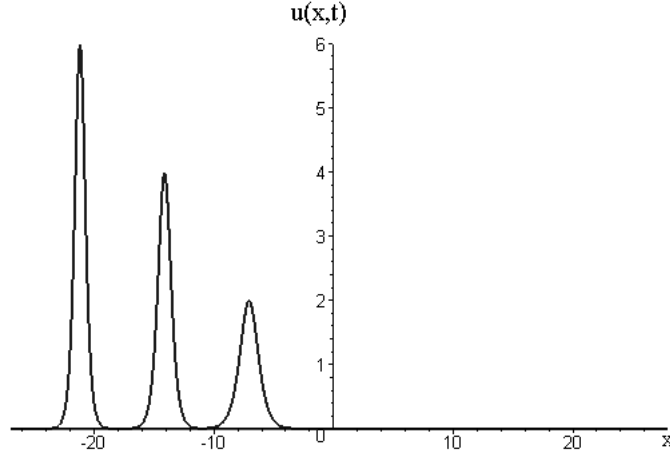
$$A = -\alpha\frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}} + \sum_{m=1}^n \left(u_m \frac{\partial^{2m-1}}{\partial x^{2m-1}} + \frac{\partial^{2m-1}}{\partial x^{2m-1}} u_m \right) + B \quad (2.11)$$

gdzie α jest stałym współczynnikiem, u_m nieznaną funkcją, a $B = B(t)$ dowolną funkcją zależną od czasu to wstawiając (2.11) do (2.1) otrzymamy równanie KdV rzędu $2n + 1$. Dla $n = 1$ i $\alpha = 4$ dostaniemy równanie KdV rzędu trzeciego (2.10), dla $n = 2$ równanie rzędu piątego itd.

Do definiowania hierarchii równań stosuje się również różne formy operatora L . Nie ma ograniczeń co do tego, jakiej klasy mają to być operatory, można stosować zarówno operatory skalarne jak i macierzowe. Metoda Laxa pozwala rozwiązać równania różniczkowe, kiedy zastosuje się ją razem z innymi metodami takimi jak Transformacja Rozpraszania Wstecznego (ang. Inverse Scattering Transform).

2.2 Metoda Hiroty

Metoda opracowana przez Hirotę w 1971 roku [17] pozwala znaleźć ewolucję równań różniczkowych poprzez sprowadzenie ich do formy dwuliniowej. W przypadku



Rysunek 2.1: Wykres przedstawia symulację 3 oddziałujących ze sobą solitonów, poruszających się z różnymi prędkościami.

równania KdV, dzięki temu można uzyskać rozwiązania wielosolitonowe, czyli znaleźć ewolucję układu złożonego z N oddziałujących ze sobą solitonów (Rysunek 2.1).

Na początku zdefiniujemy dwuliniowy operator Hiroty dla funkcji $a = a(x, t)$ i $b = b(x, t)$ [7]:

$$D_t^m D_x^n(a, b)(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^n a(x, t) b(x', t') \quad (2.12)$$

$$D_t^m D_x^n : V \times V \rightarrow V \quad (2.13)$$

dla $t' = t$, $x' = x$, gdzie n i m są dodatnimi, całkowitymi liczbami, $V \in \{R \times R \rightarrow R\}$.

Operator Hiroty spełnia dwa warunki. Dla każdego $a_1, a_2, b_1, b_2 \in V, \alpha \in R$ spełniony jest warunek dwuliniowości [18]:

$$D_t^m D_x^n(\alpha a_1 + a_2, b) = \alpha D_t^m D_x^n(a_1, b) + D_t^m D_x^n(a_2, b) \quad (2.14)$$

$$D_t^m D_x^n(a, \alpha b_1 + b_2) = \alpha D_t^m D_x^n(a, b_1) + D_t^m D_x^n(a, b_2) \quad (2.15)$$

oraz dla każdego $a, b \in V$ spełniony jest warunek symetrii:

$$D_t^m D_x^n(a, b) = D_t^m D_x^n(b, a) \quad (2.16)$$

$$D_t^m D_x^n(a, b) = D_x^n D_t^m(a, b) \quad (2.17)$$

Następnie dokonajmy podstawienia:

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f(x, t) \quad (2.18)$$

gdzie f jest nową funkcją z warunkami brzegowymi $f, f_x, f_{xx} \rightarrow 0$ dla $|x| \rightarrow \infty$. Podstawiając (2.18) do równania KdV dostaniemy:

$$f f_{xt} - f_x f_t + f f_{xxxx} - 4 f_x f_{xxx} + 3 f_{xx}^2 = 0 \quad (2.19)$$

W kolejnym kroku wyznaczmy operator Hiroty dla przypadku $m = n = 1$:

$$D_t D_x(a, b) = a_{xt}b - a_t b_x - a_x b_t + ab_{tx} \quad (2.20)$$

Po podstawieniu $a = b = f$ otrzymamy:

$$D_t D_x(f, f) = 2(f_{xt}f - f_x f_t) \quad (2.21)$$

Dla przypadku $m = 0, n = 4$ operator Hiroty zredukuje się do:

$$D_x^4(a, b) = a_{xxxx}b - 4a_{xxx}b_x + 6a_{xx}b_{xx} - 4a_x b_{xxx} + ab_{xxxx} \quad (2.22)$$

Gdy $a = b = f$ powyższa forma sprowadzi się do postaci:

$$D_x^4(f, f) = 2(ff_{xxxx} - 4f_x f_{xxx} + 3f_{xx}^2) \quad (2.23)$$

Dodając do siebie oba wyniki otrzymamy w rezultacie:

$$D_t D_x(f, f) + D_x^4(f, f) = 2(f_{xt}f - f_x f_t + ff_{xxxx} - 4f_x f_{xxx} + 3f_{xx}^2) \quad (2.24)$$

Wyrażenie w nawiasie jest takie same jak (2.19), stąd równanie KdV zapisane za pomocą operatora Hiroty przedstawia się następująco:

$$D_t D_x(f, f) + D_x^4(f, f) = 0 \quad (2.25)$$

lub opuszczając w zapisie (f, f) i wyciągając przed nawias D_x :

$$D_x(D_t + D_x^3) = 0 \quad (2.26)$$

Otrzymaliśmy równanie wyjściowe, z którego wyznaczymy rozwiązanie wielosolitonowe. Na początku zapiszmy rozwiązanie dla jednego solitonu i poszukajmy rozwiązania dla $N = 2$ solitonów:

$$u(x, t) = -2 \cdot \operatorname{sech}^2(x - 4t) \quad (2.27)$$

Wzór (2.27) przedstawia pojedynczy impuls poruszający się z prędkością $c = 4$. Można go zapisać również jako:

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(1 + \exp(8t - 2x)) \quad (2.28)$$

Porównując ze sobą (2.28) i (2.18) otrzymamy wartość funkcji $f(x, t)$:

$$f(x, t) = 1 + \exp(8t - 2x) \quad (2.29)$$

Powracając do równania KdV (2.26) zapisanego przy pomocy operatora Hiroty, wprowadźmy nową wielkość B równą:

$$B = D_x(D_t + D_x^3) = 0 \quad (2.30)$$

Ogólne rozwiązanie powyższego równania można zapisać w postaci szeregu nieskończonego:

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n f_n(x, t) \quad (2.31)$$

gdzie $f_0(x, t) = 1$, a ϵ jest dowolnym, dodatnim parametrem. Wstawiając (2.31) do (2.30) i grupując względem potęgi ϵ otrzymamy:

$$B(f_0, f_0) + \epsilon[B(f_1, 1) + B(1, f_1)] + \cdots + \epsilon^n \sum_{r=0}^n B(f_{n-r}, f_r) + \cdots = 0 \quad (2.32)$$

Przyjmując, że $B(f_0, f_0) = 0$, wtedy każde wyrażenie stojące przy ϵ musi być równe 0. Stąd dla trzech pierwszych wyrażen stojących przy ϵ otrzymamy układ równań:

$$B(f_1, 1) = 0 \quad (2.33)$$

$$2B(f_2, 1) = -B(f_1, f_1) \quad (2.34)$$

$$2B(f_3, 1) = -B(f_2, f_1) - B(f_1, f_2) \quad (2.35)$$

I w ogólnym przypadku:

$$2B(f_n, 1) = -\sum_{r=1}^{n-1} B(f_{n-r}, f_r) \quad (2.36)$$

dla $n = 2, 3, \dots, N$. Pierwsze równanie (2.33), zapisując je przy pomocy operatorów różniczkowania, będzie miało postać:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) f_1 = 0 \Rightarrow Df_1 = 0 \quad (2.37)$$

gdzie D jest liniowym operatorem. Ogólnym rozwiązaniem równania (2.37) jest:

$$f_1 = \exp(\theta_1) \quad (2.38)$$

gdzie $\theta_i = k_i x - k_i^3 t + \alpha_i$, k_i i α_i są dowolnymi stałymi. Ponieważ wyrażenie (2.37) jest liniowe, suma rozwiązań (2.38) będzie także rozwiązaniem równania (2.37). Zapiszmy więc:

$$f_1 = \exp(\theta_1) + \exp(\theta_2) \quad (2.39)$$

Wstawiając f_1 do drugiego równania (2.34) uzyskamy:

$$2B(f_2, 1) = -2 \left[(k_1 - k_2)(\omega_1 - \omega_2) + (k_1 - k_2)^4 \right] \exp(\theta_1 + \theta_2) \quad (2.40)$$

gdzie $\omega_i = k_i^3$. Stąd można wyznaczyć $f_2(x, t)$

$$f_2(x, t) = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \exp(\theta_1 + \theta_2) \quad (2.41)$$

Dla trzeciego równania i kolejnych $n = 3, 4, 5, \dots$ otrzymamy:

$$f_n = 0 \quad (2.42)$$

Sumując wszystkie rozwiązania cząstkowe na $f(x, t)$ oraz podstawiając $\epsilon = 1$ otrzymamy rozwiązanie równania (2.30) w postaci:

$$f(x, t) = 1 + \exp(\theta_1) + \exp(\theta_2) + \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \exp(\theta_1 + \theta_2) \quad (2.43)$$

W końcu wstawiając (2.43) do (2.18) otrzymamy właściwe rozwiązanie w postaci $u(x, t)$. Znalezienie wyniku dla N solitonów dokonuje się analogicznie z tą różnicą, że pod (2.39) podstawia się równanie:

$$f_1 = \sum_{i=1}^N \exp(\theta_i) \quad (2.44)$$

2.3 Transformacja Bäcklunda

Transformacja Bäcklunda, opracowana w 1883 roku przez Alberta Bäcklunda, pozwala wyznaczyć rozwiązanie równania sprzed transformacji znając tylko wynik równania przekształconego.

Niech dane będą dwie powierzchnie $\Sigma, \Sigma' \in R^3$, w których element powierzchni $\Sigma \{x, t, u, u_x, u_t\}$ jest połączony z drugim elementem powierzchni $\Sigma' \{x, t, v, v_x, v_t\}$ poprzez relacje:

$$B_i(x, t, u, v, u_x, v_x, u_t, v_t) = 0 \quad (2.45)$$

dla $i = 1, \dots, 4$. Jeśli spełniony jest warunek całkowalności:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \quad (2.47)$$

gdzie u i v są rozwiązaniami pewnych równań różniczkowych $P(u) = 0$, $Q(v) = 0$ to (2.45) nazywamy transformacją Bäcklunda. Jeśli zachodzi równość między operatorami P i Q to równanie (2.45) nazywamy auto-transformacją Bäcklunda. Na przykład równanie Laplace'a

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (2.48)$$

posiada auto-transformację Bäcklunda w postaci równań Cauchy'ego - Riemanna:

$$u_x = v_y \quad (2.49)$$

$$u_y = -v_x \quad (2.50)$$

Dla równania sinus - Gordona:

$$u_{xt} = \sin(u) \quad (2.51)$$

transformacja Bäcklunda dana jest przez:

$$v_x = u_x + 2\beta \sin\left(\frac{v+u}{2}\right) \quad (2.52)$$

$$v_y = -u_y + 2\beta \sin\left(\frac{v-u}{2}\right) \quad (2.53)$$

gdzie β jest dowolnym parametrem.

Rozpatrzmy zmodyfikowane równanie KdV przez wprowadzenie podstawienia $u = w_x$ [13]:

$$w_{tx} + 6w_x w_{xx} + w_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x}(w_t + 3w_x^2 + w_{xxx}) = 0 \quad (2.54)$$

Całkując (2.54) względem x dostaniemy:

$$w_t + 3w_x^2 + w_{xxx} = f(t) \quad (2.55)$$

Dodając nową zmienną $w' = w - \int_0^t f(s)ds$ i wstawiając ją do (2.55) wyeliminujemy funkcję $f(t)$. Stąd też uzyskujemy dwie równości: $w' = w$, $f \equiv 0$. Przepisując (2.55) i uwzględniając wcześniejsze obliczenia otrzymamy:

$$w_t + 3w_x^2 + w_{xxx} = 0 \quad (2.56)$$

Auto-transformacja Bäcklunda dla (2.56) dana jest przez układ równań:

$$w_\xi^2 = -w_x + \beta - \frac{1}{2}(w - \tilde{w})^2 \quad (2.57)$$

$$w_\tau^2 = -w_t + (w - \tilde{w})(w_{xx} - \tilde{w}_{tt}) - 2(w_x^2 + w_x \tilde{w}_\xi + \tilde{w}_\xi^2) \quad (2.58)$$

$$\xi = x; \tau = t \quad (2.59)$$

Parametr β nazywany jest parametrem Bäcklunda. Teraz można znaleźć nietrywialne rozwiązanie przez zastosowanie rozwiązania trywialnego, spełniającego równanie (2.56). Po podstawieniu $\tilde{w} = 0$ dwie pierwsze linie zredukują się do:

$$w_x = \beta - \frac{1}{2}w^2 \quad (2.60)$$

$$w_t = w w_{xx} - w_x^2 \quad (2.61)$$

Całkując pierwsze równanie i wstawiając je do drugiego otrzymamy dwa typy rozwiązań:

$$w(x, t) = \sqrt{2\beta} \cdot \operatorname{tgh} \left[\sqrt{\frac{\beta}{2}}(x - 2\beta t) \right] \quad (2.62)$$

$$\tilde{w}(x, t) = \sqrt{2\beta} \cdot \operatorname{ctgh} \left[\sqrt{\frac{\beta}{2}}(x - 2\beta t) \right] \quad (2.63)$$

Drugie równanie posiada osobliwość w punkcie $x = 2\beta t$ i jest uznane za niefizyczne. Ostatecznie otrzymujemy:

$$u(x, t) = w_x(x, t) = \beta \cdot \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{\beta}{2}}(x - 2\beta t) \right] \quad (2.64)$$

$$\tilde{u}(x, t) = \tilde{w}_x(x, t) = -\beta \cdot \operatorname{csch}^2 \left[\sqrt{\frac{\beta}{2}}(x - 2\beta t) \right] \quad (2.65)$$

2.4 Problem rozpraszania i problem rozpraszania wstecznego

Transformacja rozpraszania wstecznego (ang. Inverse Scattering Transform, IST) pozwala rozwiązać wiele nieliniowych równań różniczkowych, takich jak równanie Kortewega - De Vriesa czy też nieliniowe równanie Schrödingera. Jest to analogiczna metoda do transformacji Fouriera, którą stosuje się do rozwiązywania równań liniowych.

W 1967 roku Gardner, Greene, Miura i Kruskal przedstawili w pracy [5] metodę zwaną metodą rozpraszania wstecznego. Dzięki niej potrafili rozwiązać równanie KdV z warunkiem początkowym $u(x, 0)$, gdzie dla $x \rightarrow \infty$, $u(x, 0)$ zbliża się do pewnej stałej. Pokazali także, że można uzyskać rozwiązanie $u(x, t)$ znając tylko $u(x, 0)$ oraz rozwiązując jednowymiarowe równanie Schrödingera z zadaniem potencjałem $V(x) = u(x, 0)$:

$$\psi_{xx}(x, t) + k^2\psi(x, t) = V(x)\psi(x, t) \quad (2.66)$$

gdzie k^2 reprezentuje energię cząstki, $\psi(x, t)$ to funkcja falowa. Potencjał $V(x) \in P_1^1(\mathbb{R})$ należy klasy potencjałów $P_n^1(\mathbb{R})$ zwanych klasą Faddeev'a, która jest zdefiniowana następująco. Jeśli całka [1]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|^n)V(x)dx \quad (2.67)$$

jest skończona dla $x \in \mathbb{R}$ to potencjał $V(x) \in P_n^1(\mathbb{R})$.

Równanie (2.66) posiada dwa rozwiązania. Rozwiązanie rozproszeniowe jest liniową kombinacją funkcji e^{ikx} i e^{-ikx} dla $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jeśli założymy, że w nieskończoności funkcja falowa zbliża się asymptotycznie do jedności:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(k, x)e^{-ikx} = 1 \quad (2.68)$$

to otrzymamy rozwiązania nazywane *rozwiązanie Jost'a z lewej strony*, J_L i *rozwiązanie Jost'a z prawej strony*, J_R :

$$J_L(k, x) = \frac{1}{T(k)} e^{ikx} + \frac{L(k)}{T(k)} e^{-ikx} \quad (2.69)$$

$$J_R(k, x) = \frac{1}{T(k)} e^{-ikx} + \frac{R(k)}{T(k)} e^{ikx} \quad (2.70)$$

gdzie $T(k)$ jest współczynnikiem transmisji, $L(k)$ współczynnikiem odbicia w lewą stronę i $R(k)$ współczynnikiem odbicia w prawą stronę. Jeśli $[f, g] = fg' - g'f$ jest wrońskianem funkcji f i g to korzystając ze wzorów (2.69) i (2.70) można zapisać:

$$T(k) = \frac{2ik}{[J_R(k, x), J_L(k, x)]} \quad (2.71)$$

$$L(k) = \frac{[J_L(k, x), J_R(-k, x)]}{[J_L(k, x), J_R(k, x)]}, R(k) = \frac{[J_L(-k, x), J_R(k, x)]}{[J_L(k, x), J_R(k, x)]} \quad (2.72)$$

oraz:

$$T(k)^2 + L(k)^2 = T(k)^2 + R(k)^2 = 1 \quad (2.73)$$

Zarówno R jak i L są zdefiniowane dla rzeczywistych k , jednak dla współczynnika transmisji k może być zespolone. Dla przykładu przyjmijmy, że $k = i\kappa_j$ dla $j = 0, 1, 2, \dots, N$, wtedy otrzymamy liniowe rozwiązanie (2.66) w postaci:

$$\psi_j = c_{Lj} \cdot J_L(i\kappa_j, x) = (-1)^{(N-j)} c_{Rj} \cdot J_R(i\kappa_j, x) \quad (2.74)$$

gdzie c_{Lj} , c_{Rj} są współczynnikami normalizacyjnymi:

$$(c_{Lj})^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [J_L(i\kappa_j, x)]^2 dx \quad (2.75)$$

$$(c_{Rj})^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [J_R(i\kappa_j, x)]^2 dx \quad (2.76)$$

W ten sposób można otrzymać rozwiązanie dla stanów związanych (ang. bound-state solutions). Dla przykładu rozważmy potencjał dany wzorem, będącym rozwiązaniem solitonowym:

$$V(x) = -U_0 \cdot \operatorname{sech}^2(x) \quad (2.77)$$

gdzie U_0 jest stałe. Równanie Schrödingera przyjmuje postać:

$$\psi_{xx} + (\lambda + U_0 \cdot \operatorname{sech}^2(x))\psi = 0 \quad (2.78)$$

Dokonując podstawienia $Z = \operatorname{tgh}(x)$ po przekształceniach otrzymamy następujące równanie:

$$\frac{d}{dZ} \left[(1 - Z^2) \frac{d\psi}{dZ} \right] + \left(U_0 + \frac{\lambda}{1 - Z^2} \right) \psi = 0 \quad (2.79)$$

którego rozwiązaniem są stowarzyszone funkcje Legendre'a. Definiując $U_0 = N(N + 1)$, rozpatrzmy dwa przypadki rozwiązania (2.79) w zależności od znaku stojącym przy λ .

Przypadek, gdy $\lambda < 0$. Podstawiamy $\lambda = -k_i^2$, gdzie $k_i = i$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$ przy czym zakładamy warunek $Z \in [-1, 1]$. Wtedy rozwiązaniem (2.79) jest funkcja:

$$\psi_N^n(Z) = (-1)^n (1 - Z^2)^{(n/2)} \frac{d^n}{dZ^n} P_N(Z) \quad (2.80)$$

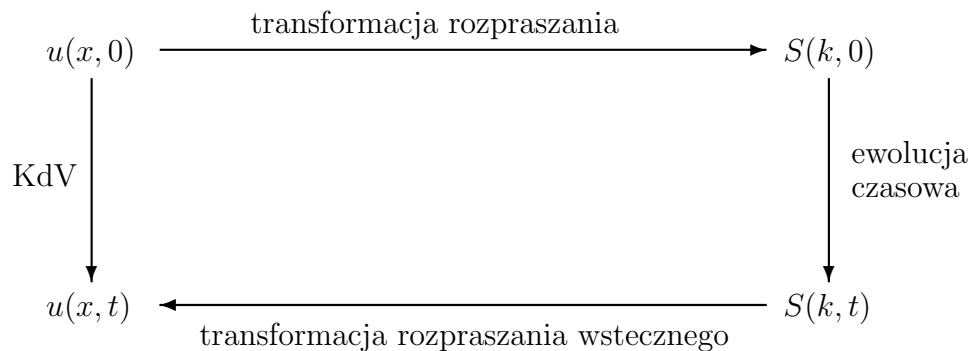
gdzie $P_N(Z)$ jest wielomianem Legendre'a.

Przypadek, gdy $\lambda > 0$. Podstawiamy $\lambda = k^2$ i otrzymujemy rozwiązanie w postaci zespolonej:

$$\tilde{\psi}(x, k) = a(k) 2^{ik} \operatorname{sech}(x)^{-ik} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{1}{2}(1 + Z)\right) \quad (2.81)$$

gdzie F jest funkcją hipergeometryczną, α, β, γ są zespolonymi współczynnikami. Znając postać potencjału $V(x)$ jesteśmy w stanie wyznaczyć wartości $T(k), L(k), R(k)$, czyli rozwiązać problem rozpraszania.

W przypadku problemu rozpraszania wstecznego niewiadomą jest potencjał $V(x)$, natomiast znane są wielkości charakteryzujące rozproszenie (ang. scattering data). Schemat wyznaczania rozwiązania za pomocą IST przedstawia Rysunek 2.2:



Rysunek 2.2: Schemat zastosowania IST dla równania KdV.

gdzie $S(k, t)$ jest dowolną reprezentacją współczynników rozpraszania T, L, R , na przykład w postaci *macierzy rozproszeniowej*:

$$\mathbf{S}(\mathbf{k}, \mathbf{t}) = \begin{bmatrix} T(k, t) & R(k, t) \\ L(k, t) & T(k, t) \end{bmatrix}$$

Gdy znane są współczynniki określające rozproszenie $\{L, \kappa_j, c_{Rj}\}$ lub $\{R, \kappa_j, c_{Lj}\}$, wtedy można wyznaczyć unikalny potencjał opisany przez te współczynniki. Używa się do tego specjalnych metod takich jak *metoda Faddeev-Marchenko*.

Niech dane będą *funkcje Faddeev'a* określone w następujący sposób:

$$F_L(k, x) = e^{-ikx} J_L(k, x) \quad (2.82)$$

$$F_R(k, x) = e^{ikx} J_R(k, x) \quad (2.83)$$

Na podstawie rozwiązań Jost'a z lewej (2.69) i prawej strony (2.70) można otrzymać relację dla funkcji Faddeev'a dla $k \in R$:

$$F_L(-k, x) = T(k)F_R(k, x) - R(k)e^{2ikx}F_L(k, x) \quad (2.84)$$

$$F_R(-k, x) = T(k)F_L(k, x) - L(k)e^{-2ikx}F_R(k, x) \quad (2.85)$$

Wyznaczenie funkcji Faddeev'a z równań (2.84) i (2.85) sprowadza się do rozwiązania problemu Riemanna - Hilberta. Znajdując postać tych funkcji można wyznaczyć potencjał ze wzorów:

$$V(x) = \frac{F_L(k, x)''}{F_L(k, x)} + 2ik \frac{F_L(k, x)'}{F_L(k, x)} \quad (2.86)$$

lub

$$V(x) = \frac{F_R(k, x)''}{F_R(k, x)} - 2ik \frac{F_R(k, x)'}{F_R(k, x)} \quad (2.87)$$

Innym sposobem na znalezienie potencjału dla konkretnych współczynników $\{L, \kappa_j, c_{Lj}\}$ lub $\{R, \kappa_j, c_{Rj}\}$ jest metoda Marchenko. Polega ona na rozwiązaniu równania Marchenko:

$$M_\Omega(x, y) + W_\Omega(\pm 2x + y) + \int_0^\infty W_\Omega(\pm 2x + y + z)M_\Omega(x, z)dz = 0 \quad (2.88)$$

gdzie

$$W_\Omega(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \Gamma(k)e^{ik\xi}dk + \sum_{j=1}^N c_{\Omega j}^2 e^{-\kappa_j \xi} \quad (2.89)$$

Potencjał dany jest wzorem:

$$V(x) = \mp 2 \frac{dM_\Omega(x, 0^+)}{dx} \quad (2.90)$$

gdzie $\Omega = \{L, R\}$, dla lewej strony $\Gamma(k) = R(k)$, dla prawej strony $\Gamma(k) = L(k)$. Więcej o metodach uzyskiwania potencjałów, dla ustalonych współczynników rozproszonych zawierają pozycje [1] i [11].

Cały proces wyznaczania rozwiązania zależnego od czasu $u(x, t)$ sprowadza się do następujących operacji (Rysunek 2.2). W pierwszej kolejności przy pomocy potencjału danego wzorem $V(x) = u(x, 0)$ rozwiązujemy jednowymiarowe równanie Schrödingera i za pomocą transformacji rozpraszania określamy współczynniki $\{c_{Rj}(k, 0), L(k, 0), \kappa_j(k, 0)\}$. W kolejnym etapie wyznaczamy ich ewolucję czasową $S(k, 0) \rightarrow S(k, t)$, a ostatnią czynnością jest zastosowanie odwrotnej transformacji rozpraszania i wyznaczenie rozwiązania $u(x, t)$.

Odpowiednie dobranie $\{c_{Rj}(k, t); L(k, t); \kappa_j(k, t)\}$ zależy głównie od tego, jakie rozpatrujemy równanie. W przypadku równania KdV współczynniki przyjmują postać [1]:

$$c_{Rj}(k, t) = c_{Rj}(k, 0)e^{4\kappa_j^3 t} \quad (2.91)$$

$$L(k, t) = L(k, 0)e^{-8ik^3t} \quad (2.92)$$

$$\kappa_j = \text{const.} \quad (2.93)$$

Ostatecznie do wyznaczenia $u(x, t)$ można użyć na przykład równania Marchenko. Podstawiając pod (2.89):

$$W_L(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} L(k, 0)e^{-8ik^3t+ik\xi} dk + \sum_{j=1}^N c_{Rj}(k, 0)^2 e^{-8\kappa_j^3t-\kappa_j\xi} \quad (2.94)$$

otrzymamy rozwiązanie zależne od czasu:

$$u(x, t) = 2 \frac{\partial M_R(x, 0^+, t)}{\partial x} \quad (2.95)$$

Więcej informacji o wstecznej transformacji rozpraszania można znaleźć w pozycjach [1], [3], [4], [5] i [11].

Rozdział 3

Metody numeryczne w fizyce

3.1 Klasyfikacja równań różniczkowych cząstkowych

Równania różniczkowe hiperboliczne, paraboliczne i eliptyczne dotyczą pewnej klasy równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu, których ogólna postać przedstawia się wzorem:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0 \quad (3.1)$$

gdzie u jest dowolną funkcją zmiennych x, y lub x, t , gdy mamy do czynienia w zagadnieniach dynamicznych. Współczynniki A, B, \dots, G są stałymi bądź funkcjami dwóch zmiennych, ponadto jeden ze współczynników A, B, C jest różny od zera. O typie danego równania decyduje wyróżnik:

$$\Delta(x, y) = B^2 - 4AC \quad (3.2)$$

W zależności od wartości wyróżnika dzielimy je na:

- eliptyczne: $\Delta(x, y) > 0$
- paraboliczne: $\Delta(x, y) = 0$
- hiperboliczne: $\Delta(x, y) < 0$

Równania eliptyczne charakteryzują się tym, że ich rozwiązania zależą głównie od zmiennych przestrzennych oraz występują one w zagadnieniach brzegowych. Przykładem równania eliptycznego jest równanie Poissona:

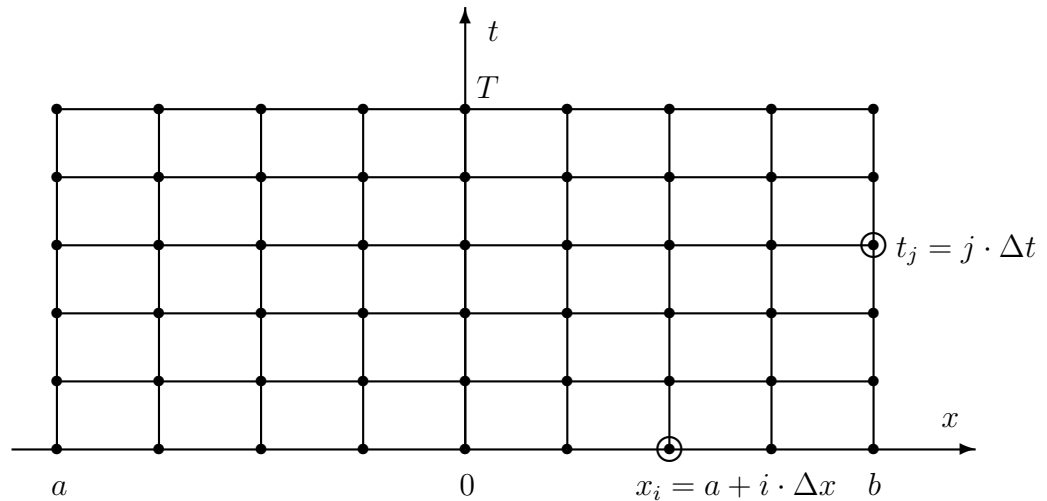
$$u_{xx} + u_{yy} = \rho(x, y) \quad (3.3)$$

Równania hiperboliczne i paraboliczne pojawiają się w zagadnieniach początkowo - brzegowych i opisują procesy dynamiczne, w których jedna ze współrzędnych jest czasem. Najprostszym równaniem hiperbolicznym jest równanie falowe, natomiast przykładem równania parabolicznego jest równanie rozchodzenia się ciepła:

$$u_t = u_{xx} \quad (3.4)$$

3.2 Siatka numeryczna

Siatka numeryczna jest skończonym zbiorem punktów, które odzwierciedlają pewien układ fizyczny. Punkty na tej siatce nazywa się *węzłami*. Wprowadźmy sobie dwuwymiarową siatkę o rozmiarach $N \times M$, gdzie N reprezentuje liczbę węzłów wymiaru przestrzennego $x \in \langle a, b \rangle$, M to liczba węzłów wymiaru czasowego $t \in \langle 0, T \rangle$ (Rysunek 3.1).



Rysunek 3.1: Przykład dwuwymiarowej siatki numerycznej o rozmiarach $N \times M$.

Wprowadźmy teraz dyskretyzację dla współrzędnych czasu t i przestrzeni x :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b \quad (3.5)$$

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{M-1} < t_M = T \quad (3.6)$$

gdzie $x_i = a + i \cdot \Delta x$ dla $i = 0, 1, 2, \dots, N$ i $t_j = j \cdot \Delta t$, dla $j = 0, 1, 2, \dots, M$, T to czas symulacji. Następnie policzmy wielkość kroków:

$$\Delta x = \frac{b - a}{N} \quad (3.7)$$

$$\Delta t = \frac{T}{M} \quad (3.8)$$

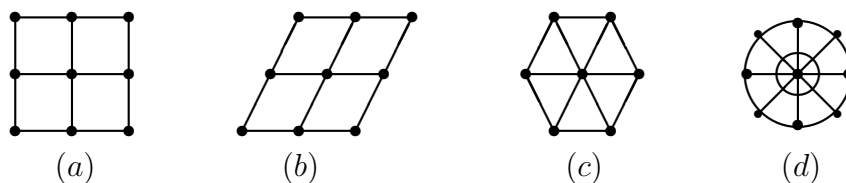
Na koniec zapiszmy rozwiązanie $u(x, t)$ we współrzędnych dyskretnych x_i, t_j :

$$u_i^j = u(x_i, t_j) \quad (3.9)$$

Tak przygotowana siatka numeryczna jest najprostszym układem, na którym można numerycznie rozwiązywać równania różniczkowe.

W zależności od rozważanego zagadnienia korzysta się z różnych rodzajów siatek, różniących się między sobą kształtem pojedynczej komórki.

Pod tym względem rozróżniamy siatki prostokątne (Rysunek 3.2(a)), skośne (b), trójkątne (c) i kołowe (d). W przypadku bardziej zaawansowanych symulacji można wprowadzić do układu więcej niż jeden ich rodzaj. Na przykład w symulacji siły nośnej skrzydła samolotu można zastosować równocześnie siatkę kołową i skośną.



Rysunek 3.2: Rodzaje komórek w siatkach numerycznych.

Ze względu na rozmieszczenie komórek, siatki dzieli się na strukturalne i niestukturalne.

W siatkach strukturalnych komórki są poukładane wzdłuż dwóch lub trzech (w przypadku trójwymiarowym) wyraźnie określonych kierunków. Każdej komórce przypisana jest liczba całkowita lub zestaw liczb zwanych indeksami. Wadą tego typu siatek jest stała gęstość węzłów na całej powierzchni. Dlatego w miejscach, gdzie potrzebna jest mała dokładność obliczeń, zużywana jest nieodpowiednio duża moc obliczeniowa.

Siatki niestukturalne charakteryzują się tym, że ich komórki są ułożone według pewnego porządku, ale nie mają wyodrębnionych kierunków. Ich komórki przyjmują najczęściej kształt trójkątów (Rysunek 3.2(c)). Zaletą tych siatek jest możliwość dopasowania ich w ten sposób, aby optymalnie opisywały kształt badanego obiektu. Jednak są one trudniejsze w implementacji i wymagają większej mocy obliczeniowej.

Każda symulacja numeryczna jest tylko przybliżeniem pewnych zjawisk fizycznych. Powodem występowania różnic pomiędzy wynikiem numerycznym a fizycznym są błędy numeryczne. Wyróżnia się ich cztery rodzaje:

- *Błąd modelowania* wynikający z założeń w zastosowanym modelu matematycznym.
- *Błąd metody* (błąd obcięcia), który powstaje w wyniku zastąpienia wielkości nieskończenie małych ich skończonymi odpowiednikami.
- *Błąd zaokrąglenia*, który jest spowodowany wykonywaniem obliczeń na liczbach o skończonej ilości miejsc po przecinku.
- *Błąd danych* wynikający z błędów, którymi są obarczone dane wejściowe.

3.3 Wybrane schematy numeryczne

Równania różniczkowe zawierają w sobie wyrażenia matematyczne takie jak różniczki oraz pochodne funkcji. Zarówno w jednym jak i drugim przypadku mamy do czynienia z wyrażeniami, które opierają się lub są zbudowane na wielkościach nieskończenie małych. Rozwiązanie takich równań numerycznie byłoby niemożliwe, gdyż komputer lub dowolna maszyna obliczeniowa jest w stanie jedynie operować na liczbach o skończonej wielkości. Zatem, aby komputer był w stanie wyznaczyć wartości pochodnych w danym punkcie, wyrażenia nieskończenie małe należy zastąpić ich skończonymi odpowiednikami. Model dyskretnego zapisu równania różniczkowego nazywamy *schematem numerycznym*.

Na początku rozpatrzmy zagadnienie Couchy'ego, czyli rozwiążmy równanie różniczkowe z warunkiem brzegowym:

$$u_x(x) = f(x, u) \quad (3.10)$$

$$u(x_0) = u_0 \quad (3.11)$$

Rozwijając funkcję $u(x + \Delta x)$ oraz $u(x - \Delta x)$ w szereg Taylora:

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x \cdot u_x(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} u_{xx}(x) + \frac{\Delta x^3}{3!} u_{xxx} + \dots \quad (3.12)$$

$$u(x - \Delta x) = u(x) - \Delta x \cdot u_x(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} u_{xx}(x) - \frac{\Delta x^3}{3!} u_{xxx} + \dots \quad (3.13)$$

można otrzymać schemat o dowolnej dokładności w zależności od tego, na którym wyrażeniu zakończy się rozwinięcie szeregu. Korzystając ze wzorów (3.12) i (3.13) oraz obcinając je do wyrazu z trzecią pochodną, otrzymamy trzy *schematy Eulera*:

1. Schemat centralny:

$$u_x(x) = \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (3.14)$$

2. Schemat przedni:

$$u_x(x) = \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.15)$$

3. Schemat tylny:

$$u_x(x) = \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.16)$$

gdzie $O(\Delta x)$ jest błędem obcięcia zapisanym przy pomocy *notacji dużego O*. Z trzech metod Eulera najbardziej dokładna jest centralna, gdyż generuje ona błędy rzędu drugiego. Stosując schemat przedni, rozwiązanie zagadnienia Couchy'ego będzie miało postać:

$$u_{i+1} = u_i + \Delta x f(x_i, u_i) \quad (3.17)$$

Powyższy przykład jest demonstracją użycia metody jednokrokowej, gdyż dla otrzymania wyniku należy przeprowadzić tylko jedną operację (3.17). Jednak metody jednokrokowe są często obciążone dużym błędem wynikającym z obcięcia wyrazów w szeregu Taylora, stąd lepiej byłoby zastosować metodę o większej dokładności. Znacznie mniejsze błędy generują metody wielokrokowe takie jak schemat Rungego-Kutty opracowany w 1900 roku przez matematyków Carla Rungego i Martina Kutty. Najpopularniejszy schemat 4 - rzędu składa się z następujących obliczeń:

$$k_1 = f(x_i, u_i) \quad (3.18)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, u_i + \frac{1}{2}k_1\Delta x\right) \quad (3.19)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, u_i + \frac{1}{2}k_2\Delta x\right) \quad (3.20)$$

$$k_4 = f(x_i + \Delta x, u_i + k_3\Delta x) \quad (3.21)$$

gdzie k_i jest krokiem metody. Rozwiązanie dane jest przez:

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{\Delta x}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3.22)$$

Błąd tej metody jest rzędu czwartego $O(\Delta x^4)$, więc jest ona bardziej dokładna niż schemat Eulera.

Następnie rozważmy kilka wybranych schematów jednokrokowych, znanych pod jedną nazwą *metod różnic skończonych*. Zastosujmy je do równania transportu (adwekcji):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.23)$$

gdzie a to dowolna stała mająca wymiar prędkości, $u = u(x, t)$ jest rozwiązaniem równania (3.23). Niech będzie także dany warunek $u(x, 0) = f(x)$ będący początkowym kształtem rozwiązania (3.23). Kiedy pochodną czasową dyskretyzuje się schematem przednim (3.15), a pochodną przestrzenną schematem centralnym (3.14), wtedy otrzymuje się *schemat FTCS* (Forward Time, Central Space). Równanie (3.23) przyjmie postać:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} = 0 \quad (3.24)$$

Przekształcając 3.24, otrzymamy wzór na kolejny krok czasowy:

$$u_i^{j+1} = u_i^j + L_C \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2} \quad (3.25)$$

Wielkość $L_C = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$ nazywana jest liczbą Courant'a, z którą związany jest warunek Courant-Friedrichs-Lewy (w skrócie CFL).

Zgodnie z warunkiem CFL czas, w jakim fala numeryczna przechodzi przez punkty siatki, musi być mniejszy lub równy od czasu przejścia rzeczywistej fali.

Oznacza to, że stabilna symulacja zachodzi dla $L_C \leq 1$. Wynikiem numerycznego rozwiązania równania adwekcji jest impuls przemieszczający się ze stałą prędkością w kierunku zależnym od znaku stojącym przy a .

W przypadku, gdy dla pochodnej przestrzennej zastosujemy schemat tylny, a dla pochodnej czasowej zastosujemy schemat przedni(3.16), wtedy otrzymamy *metodę FTBS* (Forward Time, Backward Space):

$$u_i^{j+1} = u_i^j + L_C(u_i^j - u_{i-1}^j) \quad (3.26)$$

Natomiast interpolując pochodną przestrzenną i czasową metodą centralną otrzymamy *schemat „żabiego skoku”* (leap-frog):

$$u_i^{j+1} = u_i^{j-1} + L_C(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) \quad (3.27)$$

Nazwa tego schematu pochodzi od „przeskoczenia” węzła z indeksem „i” w pochodnej czasowej.

Wszystkie schematy jednopoziomowe oprócz centralnego charakteryzują się stabilnością bezwzględną oraz występuje w nich dyfuzja numeryczna. Schemat jest stabilny bezwzględnie, jeśli kolejne generowane przez niego wartości będą skończone.

Dla lepszej dokładności i wyeliminowania dyfuzji numerycznej rozwińmy wyrażenie $u(x, t + \Delta t)$ w szereg Taylora względem czasu:

$$u(x_i, t + \Delta t) = u(x_i, t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \quad (3.28)$$

Wstawiając do równania (3.28) w miejsce pochodnej czasowej wyrażenie wzięte z równania adwekcji $u_t = -au_x$ oraz stosując dla pochodnych przestrzennych metodę centralną, otrzymamy przepis na kolejny krok czasowy:

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{L_C}{2}(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) + \frac{L_C^2}{2}(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) \quad (3.29)$$

Powyższy wzór przedstawia *schemat Laxa - Wendroffa* dla równania adwekcji. Błąd metody wynosi $O(\Delta t^3)$ dla czasu i $O(\Delta x^2)$ dla przestrzeni. Wstawiając do schematu FTCS (3.24) przekształcenie w postaci:

$$u_i^j = \frac{u_i^{j+1} + u_i^{j-1}}{2} \quad (3.30)$$

otrzymamy *metodę Laxa - Freidrischa*:

$$u_i^{j+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) - \frac{L_C}{2}(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) \quad (3.31)$$

Metodą bardziej odwzorowującą fizyczną naturę równania adwekcji jest *schemat „pod wiatr”* (upwind) [9]. Korzysta ona z informacji dochodzących zarówno z lewej

jak i z prawej strony oraz nie wyróżnia żadnego kierunku. Jej postać dla równania adwekcji jest opisana przez:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} + a \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{\Delta x} = 0, \text{ dla } a > 0 \quad (3.32)$$

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{\Delta x} = 0, \text{ dla } a < 0 \quad (3.33)$$

Co można zapisać za pomocą jednego wzoru:

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \Delta t (a^+ u_x^- + a^- u_x^+) \quad (3.34)$$

gdzie u_x^- i u_x^+ są kolejno tylnym i przednim schematem Eulera dla pochodnej przestrzennej, natomiast a^+ i a^- są dane przez:

$$a^+ = \max(a, 0) \quad (3.35)$$

$$a^- = \min(a, 0) \quad (3.36)$$

Schemat „pod wiatr” jest stabilny bezwzględnie dla liczby Couranta $L_C \leq 1$.

3.4 Analiza stabilności schematów

Stabilność schematu numerycznego jest niezbędna do prawidłowego przeprowadzenia symulacji. Istotnym wpływ ma tutaj wartość liczby Couranta. Jednak istnieją metody analityczne pozwalające na zbadanie schematu numerycznego pod względem stabilności. Przykładem może być analiza von Neumanna. Zgodnie z tą metodą schemat numeryczny jest stabilny, jeśli amplituda składowej Fouriera rozwiązania jest skończona dla wszystkich kroków czasowych.

Dla przykładu rozpatrzmy ponownie równanie adwekcji. Korzystając z metody FTCS otrzymamy wzór na kolejny krok czasowy:

$$u_n^{j+1} = u_n^j + \Delta t \frac{u_{n+1}^j - u_{n-1}^j}{2\Delta x} \quad (3.37)$$

Rozwiązanie dowolnego równania różniczkowego można przedstawić w postaci

$$u_n^j = A e^{ik(n\Delta x)} \quad (3.38)$$

gdzie n jest indeksem kroku przestrzennego, i to jednostka urojona, k to liczba falowa, A jest amplitudą. Wstawiając (3.38) do równania adwekcji (3.37) otrzymamy zależność:

$$u_{n+1}^j = u_n^j \left(1 - i \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x) \right) \quad (3.39)$$

Wyrażenie stojące przy u_n^j nazywane jest współczynnikiem wzmocnienia $W(k)$. Zgodnie z analizą von Neumanna schemat numeryczny jest stabilny, gdy zachodzi nierówność:

$$|W(k)| \leq 1 \quad (3.40)$$

W przypadku zastosowania schematu FTCS na równaniu adwekcji, współczynnik wzmocnienia nie spełnia tej nierówności dla dowolnego k :

$$|W(k)| = 1 + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\Delta x) > 1 \quad (3.41)$$

stąd jest on niestabilny.

Rozważmy jeszcze równanie opisujące przepływ ciepła w ośrodku jednorodnym:

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad (3.42)$$

Dyskretyzując powyższe równanie metodą FTCS otrzymamy:

$$u_n^{j+1} = u_n^j + \Delta t \frac{u_{n+1}^j - 2u_n^j + u_{n-1}^j}{\Delta x^2} \quad (3.43)$$

Po wstawieniu wyrażenia (3.38) do równania (3.43) otrzymamy współczynnik wzmocnienia w postaci:

$$W(k) = 1 - 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \quad (3.44)$$

Zastosowany schemat jest stabilny, gdy spełniony jest warunek (3.40) dla każdego k . To twierdzenie jest równoważne z nierównością:

$$\left|1 - 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right| \leq 1 \quad (3.45)$$

Ostatecznie rozwiązanie jest stabilne, gdy krok czasowy jest określony przez:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \Delta x^2 \quad (3.46)$$

3.5 Przykład symulacji : równanie sinus - Gordona

Rozpatrzmy sobie symulację rozwiązania równania sinus - Gordona:

$$u_{xx} - u_{tt} + \sin(u) = 0 \quad (3.47)$$

Jest to nieliniowe równanie z solitonowym rozwiązaniem zwanym kink - antykink soliton:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\exp \left(\frac{x - ct}{\sqrt{1 - c^2}} \right) \right] \quad (3.48)$$

będącym zlokalizowaną, nieliniową falą poruszającą się z prędkością $|c| < 1$. Kształt impulsu przedstawia Rysunek (1.4).

Równanie sinus - Gordona opisuje mechaniczną linię transmisyjną, która zbudowana jest z wahadeł połączonych ze sobą sprężynkami. Gdy jedno z nich zostanie odchyłone od punktu równowagi, po linii zaczyna się rozchodzić zaburzenie zachowujące się jak soliton. Kiedy x zmienia się w przedziale od $-\infty$ do ∞ odpowiada to obrocie jednego wahadła w przedziale od 0 do 2π dla *kink - soliton* oraz od 0 do -2π dla *anty-kink - soliton*.

Wyrażenie (3.48) można uogólnić na wiele typów rozwiązań, w tym na takie, które zawierają kolizje. W tym wypadku wyjściowym wzorem będzie:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\Psi(x)}{\Phi(t)} \right) \quad (3.49)$$

gdzie Ψ i Φ są pewnymi funkcjami. Dla zderzeń typu *kink - kink* (3.50) i *kink - antykink* (3.51) otrzymamy:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arc\,tg} \left[c \frac{\sinh(\gamma x)}{\cosh(\gamma ct)} \right] \quad (3.50)$$

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arc\,tg} \left[\frac{\sinh(\gamma ct)}{c \cosh(\gamma x)} \right] \quad (3.51)$$

gdzie γ dana jest wzorem:

$$\gamma(c) = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}} \quad (3.52)$$

Do przeprowadzenia prawidłowej symulacji numerycznej, należy znaleźć odpowiedni schemat numeryczny i określić warunki początkowe w postaci $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$. W przypadku zderzeń *kink - kink* (+) i *kink - antykink* (-) funkcje f i g będą równe:

$$f(x) = 4 \operatorname{arc\,tg} [\exp \gamma(x + a)] + 4 \operatorname{arc\,tg} [\exp \gamma(x - b)] \quad (3.53)$$

$$g(x) = -2\gamma c \cdot \operatorname{sech} \gamma(x + a) \pm 2\gamma c \cdot \operatorname{sech} \gamma(x - b) \quad (3.54)$$

gdzie a i b są kolejno lewą i prawą granicą przedziału. Po dyskretyzacji równania (3.47) otrzymamy schemat numeryczny:

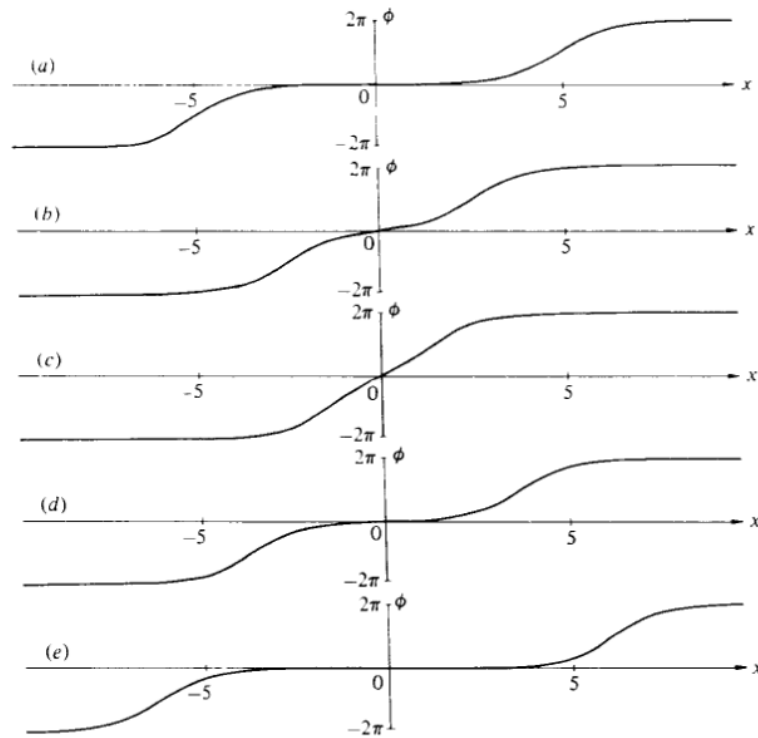
$$u_i^{j+1} = u_i^j + 2(1 - L_C^2)u_i^j + L_C^2(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) - \Delta t^2 \sin(u_i^j) \quad (3.55)$$

Warunki początkowe na podstawie funkcji f i g są równe:

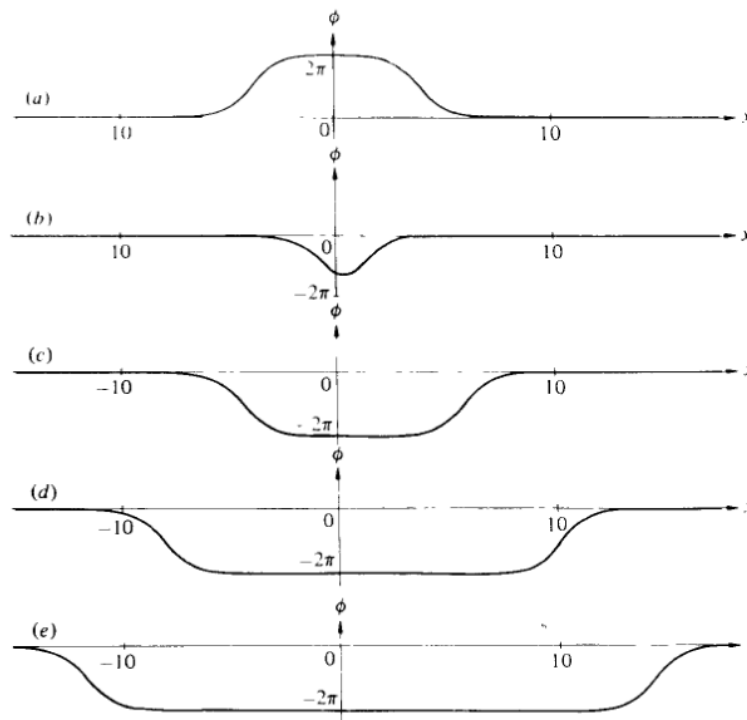
$$u_i^1 = g(x_i)\Delta t + (1 - L_C^2)f(x_i) + \frac{1}{2}L_C^2(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})) - \frac{1}{2}\Delta t^2 \sin f(x_i) \quad (3.56)$$

$$u_i^{-1} = u_i^1 - 2g(x_i)\Delta t \quad (3.57)$$

Przebieg symulacji numerycznej dla solitonów *kink - kink* oraz *kink - antykink* przedstawia kolejno Rysunek (3.1) i (3.2).



Rysunek 3.1: Interakcja dwóch kink - solitonów poruszających się ze stałą prędkością $c = 0.5$. Wykresy przedstawiają symulację dla czasów (a) $T = 0$, (b) $T = 5$, (c) $T = 10$, (d) $T = 15$ oraz (e) $T = 20$. W momencie zderzenia prędkości obu zaburzeń ulegają zmianie.



Rysunek 3.2: Wykres przedstawiający interakcję kink - antykink solitonów dla czasów (a) $T = 0$, (b) $T = 7.5$, (c) $T = 15$, (d) $T = 22.5$ oraz (e) $T = 30$. W momencie zderzenia ich prędkości się zmieniają.

Poza solitonami typu *kink* – *antykink* istnieje jeszcze trzeci rodzaj rozwiązania równania sinus - Gordona zwany *braterski soliton* (ang. breather soliton), którego rozwiązanie dane jest przez:

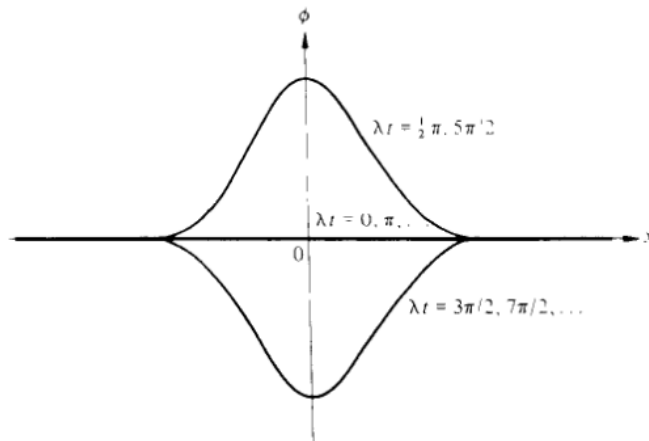
$$u(x, t) = 4 \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\sqrt{1 - \omega^2} \sin(\omega t)}{\omega \cosh \sqrt{1 - \omega^2} x} \right) \quad (3.58)$$

gdzie ω jest częstością kołową oscylacji solitonu, zaś samo rozwiązanie jest stacjonarnym zaburzeniem. W tym wypadku funkcje opisujące warunek początkowy przyjmują postać:

$$f(x) = 0 \quad (3.59)$$

$$g(x) = \frac{4}{\gamma} \cdot \operatorname{sech} \left(\frac{x}{\gamma} \right) \quad (3.60)$$

Schemat numeryczny jest ten sam, co w przypadku solitonów *kink* – *antykink*. Przebieg symulacji przedstawia Rysunek (3.3)



Rysunek 3.3: Przebieg symulacji stacjonarnego, braterskiego solitonu, gdzie częstość kołowa jest równa $\lambda = \omega = 0.2$. Wykres przedstawia ewolucję dla czasów $t = 0, \frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{\omega}, \frac{3\pi}{2\omega}, \frac{2\pi}{\omega}, \dots$

Rozdział 4

Badania własne: Numeryczna symulacja rozwiązania równania KdV

4.1 Krótka charakterystyka języka Fortran i biblioteki OpenGL

Język FORTRAN (ang. FORmula TRANslator) jest jednym z najstarszych języków programowania. Jego początki sięgają końca lat 50, kiedy to programowanie komputerów polegało na odpowiednim kodowaniu kart perforowanych. Twórcą tego języka jest John Backus pracujący w latach 1954 - 1957 dla firmy IBM. Z biegiem lat język ewoluował i pojawiały się jego nowe standardy. Wersja Fortran 77 umożliwiała programowanie strukturalne, w Fortranie 90/95 zostały zlikwidowane etykiety i przebudowana składnia. Najnowsza wersja języka - Fortran 2003 pozwala na programowanie obiektowe. Dzięki wysokiej jakości kodu generowanego przez kompilatory Fortrana, doskonale nadaje się on do obliczeń numerycznych i pomimo wielu lat istnienia i dość archaicznej składni, Fortran wciąż jest używany przez środowiska naukowe.

Jego najważniejszymi zaletami są: bardzo dobra optymalizacja kodu wynikowego, przenośność kodu pomiędzy różnymi architekturami, prostota składni, dostępność kompilatorów pod niemal każdy system operacyjny. Wadą języka jest brak wizualizacji wyników, choć jest ona możliwa w połączeniu z pewnymi bibliotekami.

OpenGL (ang. Open Graphics Library - otwarta biblioteka graficzna) jest wieloplatformowym interfejsem programowania aplikacji działającym na zasadzie klient-serwer, gdzie klientem jest aplikacja wykorzystująca OpenGL, a serwerem najczęściej sterownik karty graficznej. Interfejs OpenGL jest często używany do przedstawiania wyników obliczeń naukowych, a także wykorzystuje się go w programach użytkowych takich jak aplikacje CAD czy silniki renderujące.

4.2 Program „Symulacja równania KdV”

Program numeryczny został napisany w języku Fortran 95. Do utworzenia pliku wykonywalnego (ang. executable file) został użyty darmowy kompilator GNU Fortran 95, który można pobrać ze strony:

<http://gcc.gnu.org/fortran/>

Kompilacja w środowisku Windows odbywa się przez polecenie:

```
gfortran kvd.f95 -o kvd.exe
```

Program oblicza ewolucję układu dla N_t kroków czasowych, gdzie każdy krok oznacza jedną klatkę animacji. Po skończeniu obliczeń aplikacja zapisuje dwa pliki: *config.cfg* i *data.dat*. Pierwszy z nich jest niezbędny do działania programu odpowiedzialnego za wizualizację, drugi zawiera dane dotyczące przebiegu samej symulacji. Pełny kod źródłowy znajduje się poniżej:

```
!
! *** Symulacja równania KdV ***
!
!   autor: Bartłomiej Mrysz
!
!           2010 Lublin

program kvd                                ! Rozpoczęcie programu

  implicit none

  ! Ustawienia programu
  real, parameter :: Xmax = 8.0           ! Przedział wartości X
  real, parameter :: Xmin = -8.0

  ! Deklaracja tablic
  real, dimension(:), allocatable :: x    ! Współrzędna x
  real, dimension(:), allocatable :: u    ! Współrzędna u(x,t)

  ! Pozostałe deklaracje
  real :: Lc, dx, dt                       ! Liczba Couranta, krok przestrzenny i czasowy
  real :: K                                 ! Liczba solitonów
  integer :: N                              ! Liczba węzłów siatki
  integer :: Nt                             ! Liczba kroków czasowych
  integer :: i, j
  real :: procent

  ! Formatowanie danych
  character(len=32) :: fmt2 = "(1x,a,1x,f4.1,1x,a)" ! Ile procent obliczeń
  character(len=32) :: fmt3 = "(1x,f12.8,1x,f12.8,1x,a)" ! Plik ze współzrędnymi
  character(len=32) :: fmt4 = "(1x,a,$)"           ! Podaj liczbę ciał i klatek

  ! Główny program
  write(*,*) ''
  write(*,*) '*** Symulacja rownania KdV ***'
  write(*,*) ''
  write(*,*) 'autor: Bartłomiej Mrysz'
  write(*,*) ''
  write(*,fmt4) 'Podaj liczbę wezłow siatki: '
  read(*,*) N
  write(*,*) ''
  write(*,fmt4) 'Podaj liczbę krokow czasowych: '
  read(*,*) Nt
  write(*,*) ''
  write(*,fmt4) 'Podaj liczbę Couranta: '
```

```

read(*,*) Lc
write(*,*) ''
write(*,fmt4) 'Podaj liczbe solitonow: '
read(*,*) K
write(*,*) ''

dx = (Xmax - Xmin)/N           ! Definicja kroku przestrzennego
dt = Lc*dx                     ! Definicja kroku czasowego

allocate(u(N), x(N))           ! Alokacja tablic ze współrzędnymi

call ZapiszKonfiguracje()      ! Procedura zapisujące konfigurację
call WartosciPocztakowe()      ! Procedura wyznaczająca profil początkowy
call Oblicz()                  ! Procedura rozwiązująca równanie KdV
                                ! dla kolejnych kroków czasowych

deallocate(u, x)               ! Usunięcie tablic z pamięci komputera

contains

subroutine Oblicz()

  open(1, file='data.dat', action='write', status='replace')
  do j=1, Nt, 1                 ! Pętla przebiegająca po krokach czasowych
    procent = j
    do i=3, N-2, 1              ! Pętla przebiegająca po krokach przestrzennych
                                ! Schemat numeryczny równania KdV

      u(i) = u(i) - dt*(6*u(i)*(u(i+1)-u(i-1)))/(2*dx) + (u(i+2)-2*u(i+1)+2*u(i-1)-u(i-2))/(2*dx*dx*dx)

      write(1,fmt3) x(i), u(i), "0"           ! Zapis współrzędnych x, u(x,t) do pliku
    enddo
    write(*,fmt2,advance='no') 'Trwa obliczanie:', procent/Nt*100, '% '//char(13)
  enddo

  close(1)

  return

end subroutine Oblicz
subroutine ZapiszKonfiguracje()

  open(3, file='config.cfg', action='write', status='replace')
  write(3,*) N, Nt               ! Zapisanie liczby węzłów i kroków czasowych do pliku
  close(3)

  return
end subroutine ZapiszKonfiguracje

subroutine WartosciPocztakowe()
  implicit none

  x(1) = Xmin

  do i=1, N-1, 1
    x(i+1) = x(i) + dx           ! Zapisanie do tablicy zmiennej X kolejnych
                                ! wartości różniących się o dx
  enddo

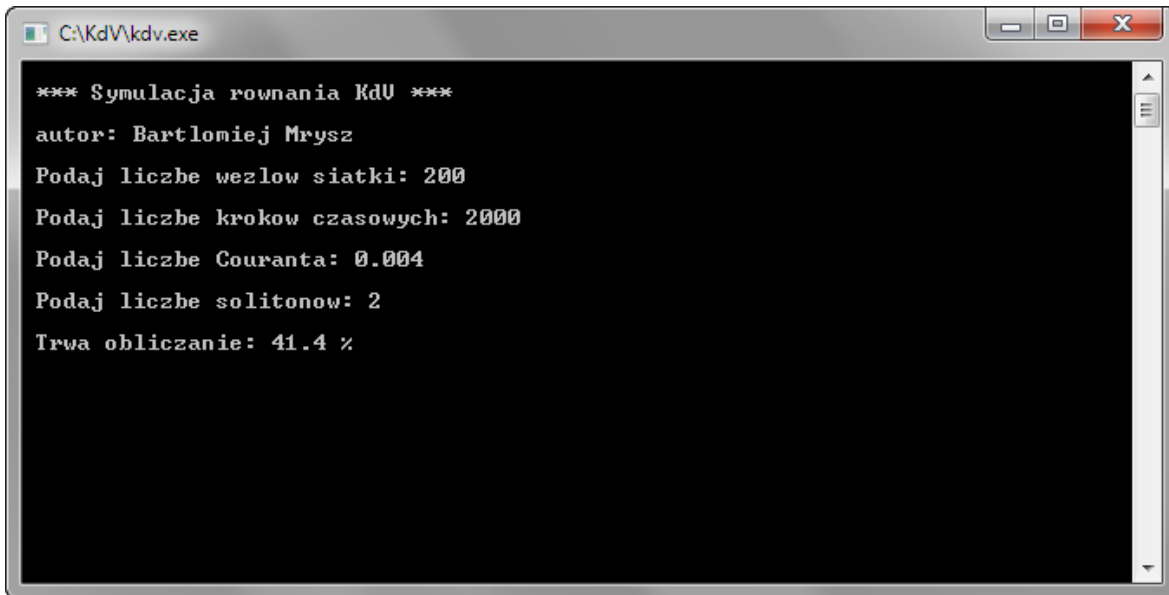
  do i=1, N, 1
    u(i) = K*(K+1)/(cosh(x(i))*cosh(x(i))) ! Profil fali solitonowej
  enddo

  return
end subroutine WartosciPocztakowe

end program                       ! Koniec programu

```

Po skompilowaniu i uruchomieniu programu powinno się pojawić okno, w którym podaje się dane wejściowe: ilość węzłów siatki, liczba kroków czasowych, liczba Couranta oraz ilość solitonów (Rysunek (4.1)).



```

C:\KdV\kdv.exe
*** Symulacja rownania KdU ***
autor: Bartlomiej Mrysz
Podaj liczbe wezlow siatki: 200
Podaj liczbe krokow czasowych: 2000
Podaj liczbe Couranta: 0.004
Podaj liczbe solitonow: 2
Trwa obliczanie: 41.4 %

```

Rysunek 4.1: Program „Symulacja równania KdV” w trakcie obliczeń.

Do wizualizacji posłużyła aplikacja napisana w języku *C* korzystająca z interfejsu OpenGL oraz biblioteki SDL (ang. Simple DirectMedia Layer). Zastosowanie biblioteki SDL umożliwia kompilację kodu programu okienkowego na wielu systemach operacyjnych bez żadnej ingerencji w kod. Jej pełna dokumentacja znajduje się na stronie:

<http://libsdl.org>

4.3 Dyspersja i nieliniowość

Zanim opiszę symulację solitonów, przeprowadzę analizę dwóch efektów, które powodują powstawanie tych fal. Na początku rozważę efekt *dyspersji*. Badanym równaniem będzie:

$$u_t + u_{xxx} = 0 \quad (4.1)$$

Po przeprowadzeniu dyskretyzacji otrzymamy schemat dla pochodnej czasowej i pochodnej przestrzennej trzeciego rzędu.

$$u_t = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} \quad (4.2)$$

$$u_{xxx} = \frac{u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j}{2\Delta x^3} \quad (4.3)$$

Z powyższych równań otrzymamy schemat numeryczny dla kolejnego kroku czasowego:

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \Delta t \frac{u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j}{2\Delta x^3} \quad (4.4)$$

Do badań nieliniowości i dyspersji przyjąłem, że krok przestrzenny jest stały i równy $\Delta x = 0.08$, liczba węzłów siatki wynosi $N = 200$, a zbiór wartości x zawiera się w przedziale $-8 < x < 8$. Krok czasowy jest ustalany poprzez liczbę Courant'a L_C :

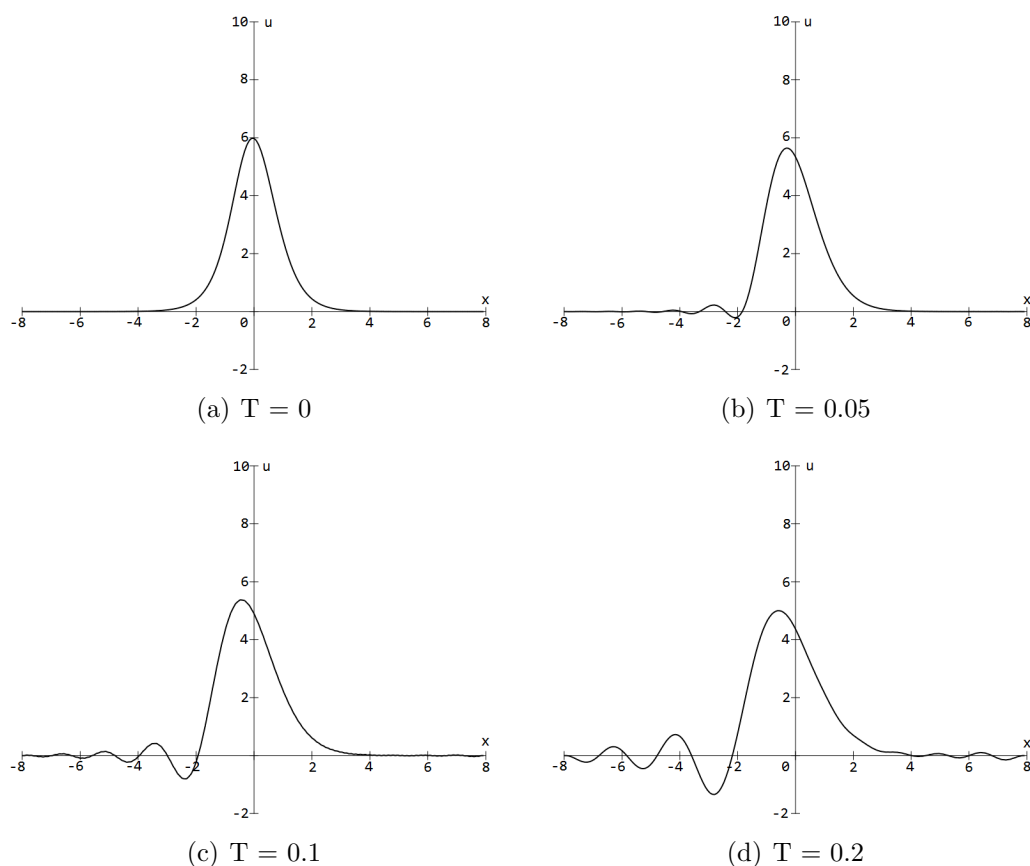
$$\Delta t = L_C \cdot \Delta x \quad (4.5)$$

Warunek początkowy u_i^0 jest określony przez:

$$u_i^0 = 6 \cdot \operatorname{sech}^2(x_i) \quad (4.6)$$

W równaniu dyspersji pochodna przestrzenna zależy od trzeciej potęgi kroku przestrzennego, stąd liczba Courant'a L_C nie może być duża. Optymalną wartością zapewniającą stabilność dla wcześniej przyjętych parametrów będzie $L_C = 0.004$. Odpowiada to krokowi czasowemu $\Delta t = 0.00032$.

Przebieg symulacji przedstawia Rysunek (4.2). Widać na nim powolne przechylenie się profilu fali *w lewą stronę* oraz generowanie *krótko-okresowych oscylacji*.



Rysunek 4.2: Kolejne etapy ewolucji równania dyspersyjnego $u_t + u_{xxx} = 0$. Człon dyspersyjny wpływa na kształt profilu powodując jego przechylenie się w lewą stronę i generowanie krótko-okresowych oscylacji.

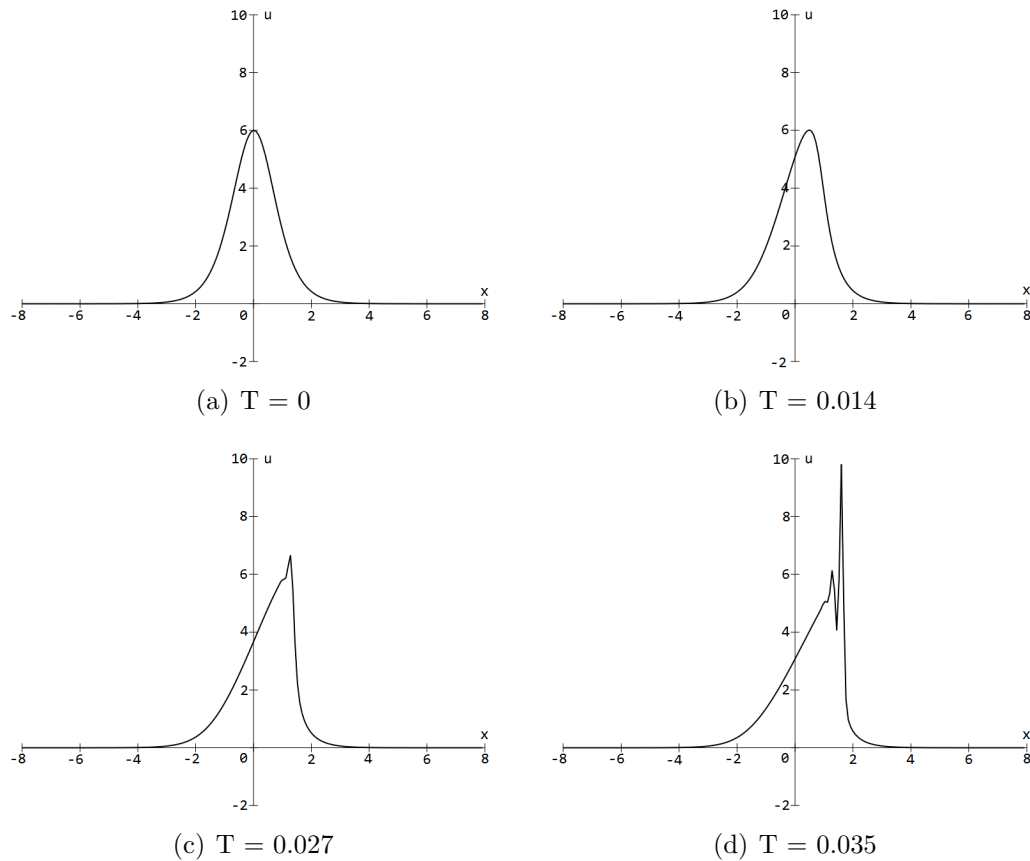
W przypadku *nieliniowości*, badanym równaniem będzie:

$$u_t + 6uu_x = 0 \quad (4.7)$$

Dyskretna postać dla kolejnego kroku czasowego dana jest przez:

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \Delta t 6 u_i^j \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} \quad (4.8)$$

Dla równania (4.7) liczba Courant'a będzie równa $L_C = 0.06$ co przekłada się na krok czasowy $dt = 0.0048$. Powyżej tej wartości symulacja staje się niestabilna. Rozwiązanie równania (4.7) przedstawia Rysunek (4.3).



Rysunek 4.3: Przebieg symulacji równania nieliniowego $u_t + 6uu_x = 0$. Profil dla czasu $T = 0.027$ zaczyna być stromy z jednej strony wskutek zależności prędkości fali od jej amplitudy. Wyższe partie poruszają się szybciej od dolnych, co skutkuje powstaniem nieciągłości dla $T = 0.035$ i pojawieniem się błędów numerycznych.

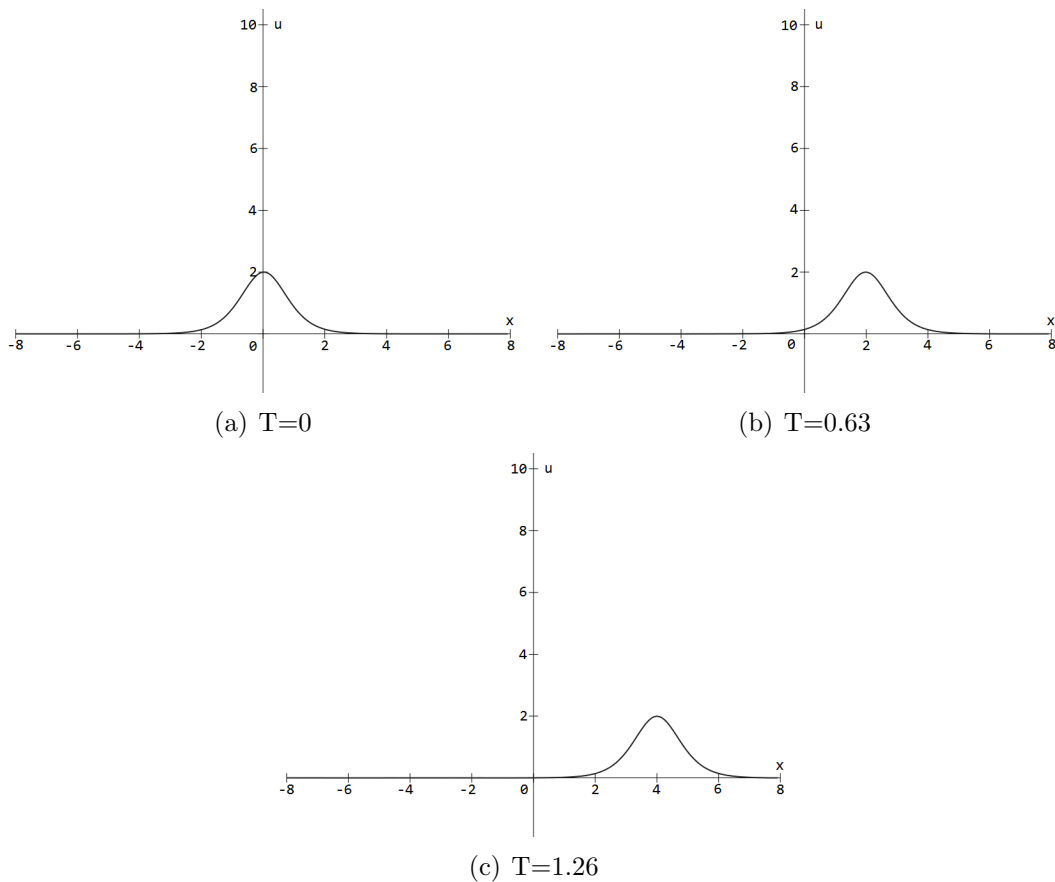
Symulacja numeryczna przeprowadzona dla równania nieliniowego pokazuje, że z biegiem czasu profil fali zaczyna być coraz bardziej stromy i przechyla się *w prawą stronę*. Po czasie $T = 0.35$ w wyniku powstania nieciągłości zaczynają pojawiać się błędy numeryczne.

4.4 Powstanie solitonu

Ewolucja czasowa solitonu w wyniku dyskretyzacji równania Kortewega - de Vriesa dana jest przez:

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \Delta t \left(6u_i^j \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} + \frac{u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j}{2\Delta x^3} \right) \quad (4.9)$$

Rysunek (4.4) przedstawia wynik symulacji równania KdV dla parametrów równych: $\Delta x = 0.08$ dla $-8 < x < 8$, liczba węzłów siatki $N = 200$ i liczba Courant'a $L_C = 0.004$.

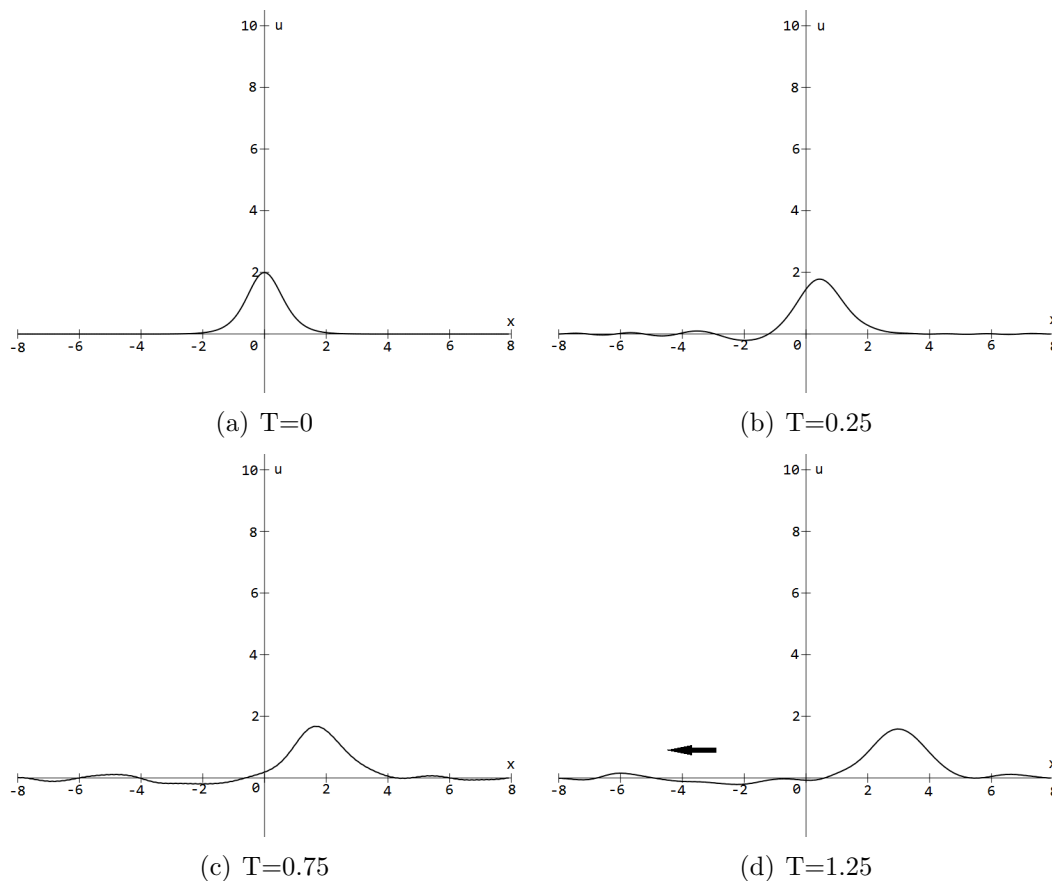


Rysunek 4.4: Soliton o amplitudzie $A = 2$ przemieszczający się w prawo z prędkością $c = 4$. Nieliniowość przechylając profil fali w prawo, zapobiega działaniu dyspersji, która powoduje przechylenie profilu w lewo. Efektem tego jest stabilny impuls, nie zmieniający kształtu ani prędkości.

Solitony są wyjątkowo stabilnymi falami i wszelkie zaburzenia do nich wprowadzone są *odrzucone* w postaci ogona fal przemieszczających się w przeciwną stronę do ruchu solitonu (Rysunek 4.5(d)). Niech dany będzie soliton o warunku początkowym:

$$u_i^0 = 2 \cdot \operatorname{sech}^2(x'_i) \quad (4.10)$$

gdzie $x'_i = x_i + \epsilon x_i$, a ϵ jest wprowadzonym niewielkim zaburzeniem. Ewolucja równania KdV dla $\epsilon = 0.3$ przedstawia Rysunek (4.5).



Rysunek 4.5: Symulacja solitonu dla którego wprowadzono niewielkie zaburzenie. Strzałka (d) wskazuje na kierunek rozchodzenia się ogona fal powstałych z wprowadzonego zakłócenia.

Przykładem innego zaburzenia jest dowolny warunek początkowy, który nie jest tożsamy ze wzorem (4.11). Każdy profil zmieniający się zgodnie z równaniem KdV przekształci się po pewnym czasie w solitony.

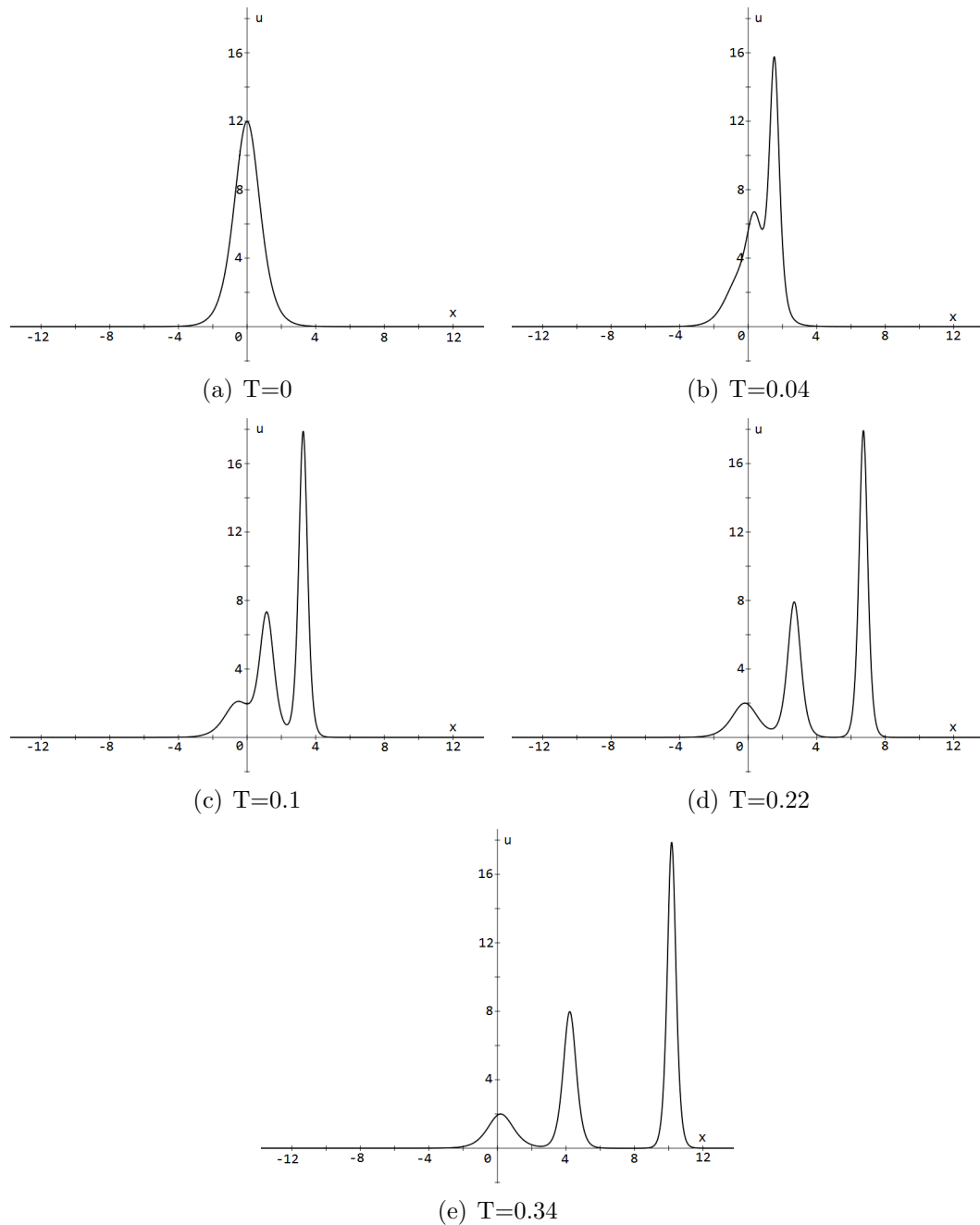
4.5 Kolizje solitonów

To co szczególnie wyróżnia solitony od innych rozwiązań równań różniczkowych to ich kolizje ze sobą. Warunek początkowy dla K solitonów dany jest przez:

$$u_i^0 = K(K + 1) \cdot \operatorname{sech}^2(x_i) \quad (4.11)$$

Na przykład ewolucję dla $K = 3$ przedstawia Rysunek (4.6).

Wzór (4.11) poprawnie opisuje początkowy kształt solitonów, jednak nie jest on dobry do wykonania badania. Wszystkie impulsy z warunkiem początkowym (4.11) są złączone w jeden dla czasu $T = 0$. Kiedy $T > 0$ wtedy zaczynają oddalać się od siebie w skutek różnej prędkości każdego z nich, a dla $T < 0$ są rozdzielone i przybliżają się do siebie. Chcąc przeprowadzić symulację uwzględniającą wszystkie te etapy musimy znaleźć warunek początkowy dla jakiegoś $T < 0$, a wzór (4.11) pozwala tylko na zbadanie impulsu dla czasu $T \geq 0$.



Rysunek 4.6: Symulacja numeryczna równania KdV dla trzech solitonów. Warunek początkowy dany jest przez $u(x, 0) = 12 \cdot \operatorname{sech}^2(x)$. Czas symulacji zawiera się w przedziale $0 < T < 0.34$. Początkowy profil (a) rozpada się na trzy impulsy (d),(e) poruszające się w prawo.

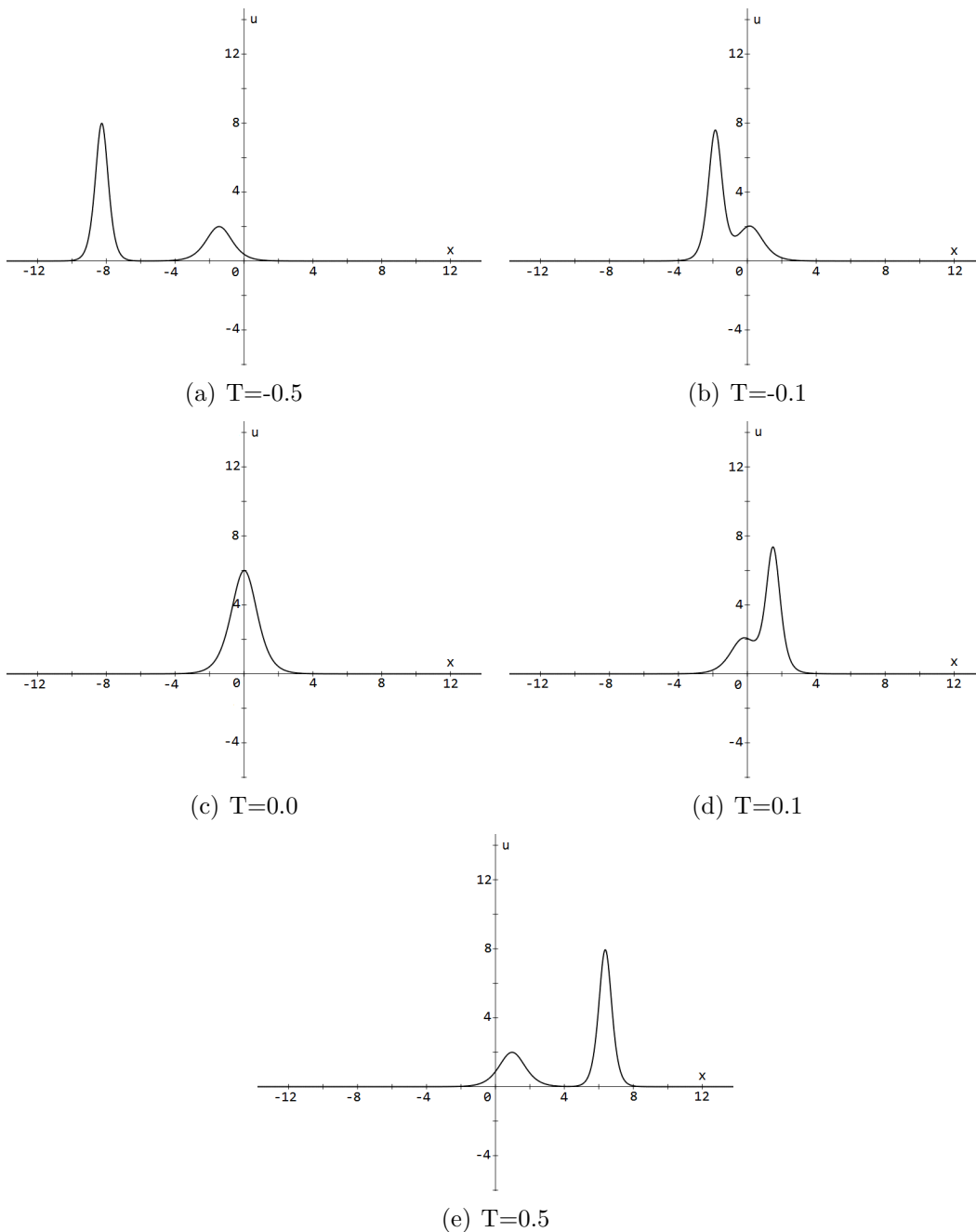
Do znalezienia dobrego początkowego profilu można posłużyć się analitycznym dwusolitonowym rozwiązaniem:

$$u(x, t) = 12 \frac{3 + 4 \cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{[3 \cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t)]^2} \quad (4.12)$$

Powyższe rozwiązanie jest poprawne dla czasów $-\infty < T < \infty$ i nic nie stoi na przeszkodzie, żeby skonstruować z niego warunek początkowy dla czasu mniejszego od zera.

Zatem dokonując transformacji $x \rightarrow x_i$ oraz $t \rightarrow t_0$ we wzorze (4.12), gdzie t_0 jest stałe i oznacza czas początkowy symulacji, otrzymamy warunek dla dowolnego T .

Parametry symulacji muszą ulec zmianie, żeby zapobiec *dyfuzji numerycznej*, która powoduje rozplýwanie się profilu fali. W tym celu krok przestrzenny został zmniejszony o połowę $\Delta x = 0.04$. Pozostałe parametry programu będą równe: liczba węzłów $N = 700$, przedział wartości $-14 < x < 14$, liczba Courant'a $L_C = 0.001$ i czas początkowy $t_0 = -0.5$. Wynik przeprowadzonego doświadczenia przedstawia Rysunek (4.7).



Rysunek 4.7: Symulacja numeryczna kolizji dwóch solitonów dla czasu $-0.5 < T < 0.5$. Soliton w przeciwieństwie do fal liniowych nie zmienia swojej prędkości ani kształtu po oddziaływaniu z innym solitonem.

Rysunek 4.7(a) przedstawia dwa oddzielne impulsy poruszające się w prawą stronę. Każdy z nich przemieszcza się z inną prędkością zależną od amplitudy fali. Wyższy impuls porusza się szybciej od niższego co jest charakterystyczne dla fal nieliniowych. Następnie w czasie $T = -0.1$ wyższy soliton zaczyna doganiać niższego i obie fale zaczynają ze sobą *oddziaływać*. Efektem tego jest zwiększona prędkość wyższego solitonu oraz zmiana jego amplitudy (b). Dla czasu $T = 0$ (c) oba solitony nakładają się na siebie. Amplituda tak powstałego zaburzenia nie jest równa sumie amplitud składających się na nią fal. Oznacza to, że w zasada superpozycji nie jest spełniona, z przyczyny występowania nieliniowości. Oba solitony po interakcji ze sobą (d), (e) oddalają się od siebie. Zarówno prędkość jak i kształt każdego z nich są *takie same*, jak sprzed kolizji.

4.6 Problem FPU

W 1955 roku Fermi, Pasta i Ulam prowadzili badania nad numerycznym modelem drgań jednowymiarowej sieci krystalicznej. Szukali oni odpowiedzi na pytanie, dlaczego energia w ciałach stałych nie jest transportowana bez przeszkód poprzez drgania swobodne. Model jaki rozważali został zaproponowany przez Debya w 1914 roku i opierał się na nieliniowym równaniu ze słabym członem dyspersyjnym:

$$u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0 \quad (4.13)$$

gdzie $\delta = 0.022$, a warunek początkowy dany jest przez:

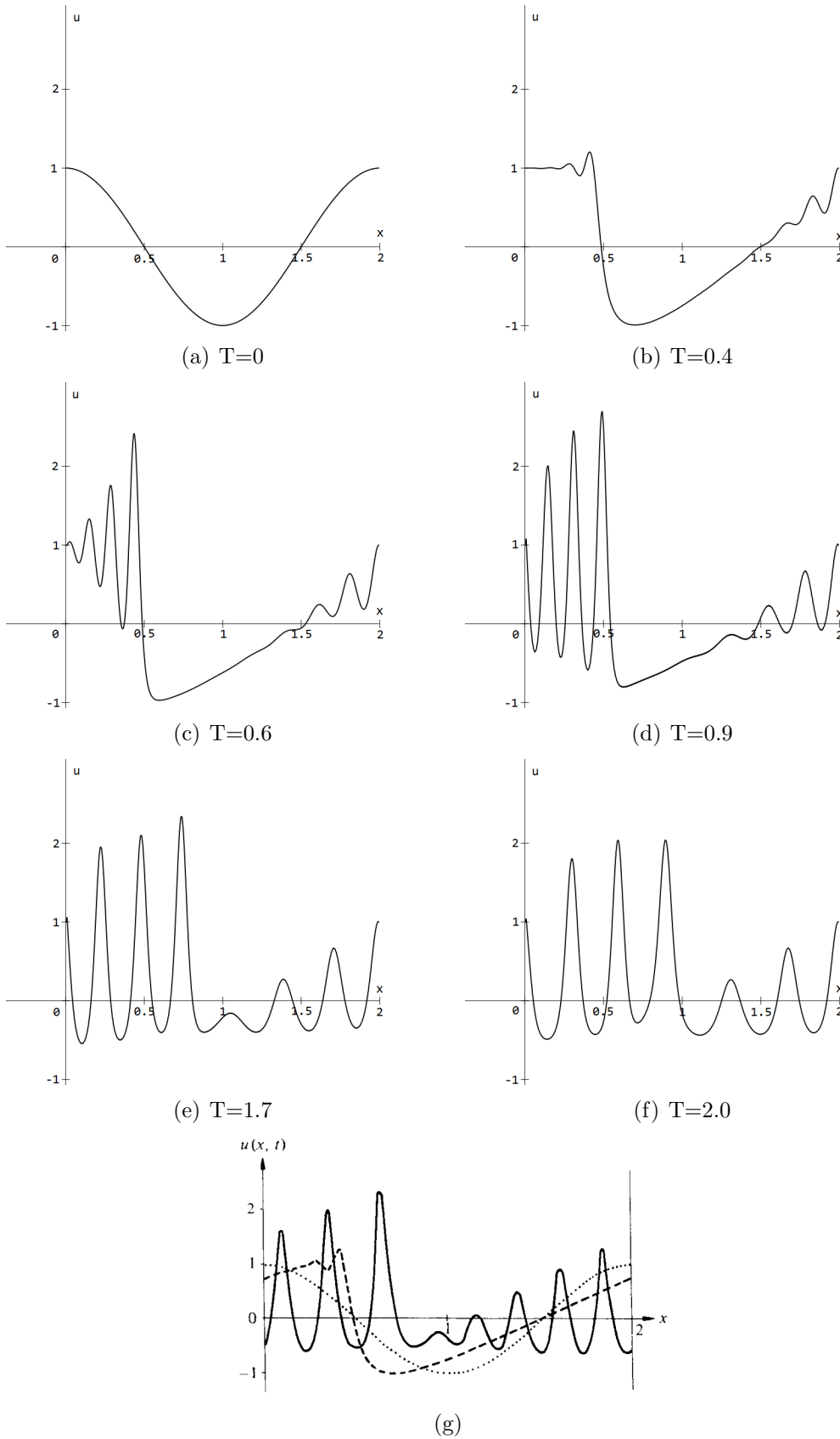
$$u_i^0 = \cos(\pi x_i) \quad (4.14)$$

dla $x \in \langle 0, 2 \rangle$. Rezultat doświadczenia okazał się zaskakujący. Naukowcy spodziewali się, że człon nieliniowy spowoduje powolne zanikanie energii, tymczasem była ona transportowana bez żadnych strat. Wynik tego eksperymentu został nazwany problemem FPU (Fermi-Pasta-Ulam) i była to pierwsza symulacja numeryczna, w której zaobserwowano solitony.

Do znalezienia przebiegu ewolucji równania (4.13) parametry programu zostały ustawione w następujący sposób: liczba węzłów siatki jest równa $N = 500$, krok przestrzenny $\Delta x = 0.004$ dla $0 < x < 2$, liczba Courant'a $L_C = 0.02$, współczynnik stojący przy członie dyspersyjnym $\delta = 0.022$. Warunek początkowy jest dany przez (4.14) z okresowym warunkiem brzegowym:

$$u_N^0 = u_0^0 \quad (4.15)$$

Przebieg symulacji przedstawia Rysunek (4.8). *Nieliniowość* powoduje, że początkowy profil (a) staje się stromy z jednej strony (b). W kolejnych etapach czasu coraz silniej zaczyna działać *dyspersja* (c) powodując powstawanie solitonów (d), które wzajemnie ze sobą oddziałują (e), (f).



Rysunek 4.8: Kolejne etapy symulacji numerycznej problemu FPU. Na samym dole (g) przedstawiony jest wynik podobnego doświadczenia z 1965 roku otrzymany przez Zabusky'ego i Kruskala. Linia kropkowana pokazuje profil dla czasu $t = 0$, linia przerywana dla $t = 1/\pi$, a ciągła dla $t = 3.6/\pi$.

Podsumowanie

Badania nad równaniem Kortewega - de Vriesa pozwoliły mi przyjrzeć się bliżej zjawisku zwanym solitonem. Zarówno nieliniowość jak i dyspersja, chociaż osobno działają destruktywnie na kształt fali, razem są w stanie stworzyć stabilne zaburzenie. Dodanie do warunku początkowego jakiegoś zakłócenia nie powoduje rozpadu solitonu.

Symulacja numeryczna równania KdV w problemie FPU pokazała, że jeśli profil początkowy nie będzie przypominał zlokalizowanego impulsu, to i tak z biegiem czasu przekształci się on w solitony.

Kolizja pomiędzy dwoma solitonami ukazała wyjątkowy charakter tych fal. Kiedy oba solitony zderzają się ze sobą, zmienia się ich amplituda i prędkość, jednak po kolizji te wielkości wracają do stanu początkowego. Podobnie się dzieje, gdy zbadamy oddziaływanie trzech lub więcej solitonów.

Symulacja równania KdV pokazała także różnicę między falą liniową a nieliniową. Przede wszystkim fale nieliniowe poruszają się z prędkością zależną od ich amplitudy, co było dobrze widoczne w symulacji trzech solitonów. Ponadto solitony nie spełniają zasady superpozycji, gdyż amplituda impulsu będącego złożeniem dwóch solitonów jest *mniejsza* niż amplituda najwyższego solitonu wchodzącego w skład tego impulsu.

Dzięki zastosowaniu w badaniach schematu przedniego Eulera dla pochodnej czasowej i przestrzennej, symulacja wykazała stabilność dla pewnych początkowych parametrów. Ważnym czynnikiem była tu liczba Courant'a oraz gęstość siatki numerycznej. Przy zastosowaniu zbyt dużego kroku przestrzennego pojawiała się dyfuzja numeryczna, którą należało wyeliminować zmniejszając odległość między węzłami siatki.

Bibliografia

- [1] P. G. Drazin, R.S. Johnson: *Solitons: an introduction*, Cambridge University Press (1989)
- [2] Alan C. Newell: *Solitons in mathematics and physics*, Society of Industrial and Applied Mathematics (1985)
- [3] Mark J. Ablowitz, P. A. Clarkson: *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, Cambridge University Press (1991)
- [4] Mark J. Ablowitz, H. Segur: *Solitons and the Inverse Scattering transform*, Society of Industrial and Applied Mathematics (1981)
- [5] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura: *Method for solving the Korteweg - de Vries equation*, The American Physical Society (1967)
- [6] John M. Neuberger: *Variational Methods: Open Problems, Recent Progress and Numerical Algorithms*, The American Mathematical Society (2002)
- [7] Michel Remoissenet: *Waves called solitons: concepts and experiments*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1999)
- [8] C. Rogers, W. F. Shadwick: *Bäcklund transformations and their applications*, Academic Press Inc. (1982)
- [9] K. Murawski: *Analytical and Numerical Methods for Wave propagation in Fluid Media*, World Scientific, Singapore (2002)
- [10] G.L. Lamb: *Elements of soliton theory*, Wiley, New York (1980)
- [11] Tuncay Aktosum: *Inverse Scattering Transform, KdV and Solutions*, University of Texas (2004)
- [12] D.J. Korteweg, G. de Vries: *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Philosophical Magazine Vol. 39, p422-443, (1895)

-
- [13] Klaus Brauer: *The Korteweg - de Vries Equation: History, exact Solutions, and Graphical Representation*, University of Osnabrück (2000)
- [14] Lord Rayleigh: *On Waves*, Philosophical Magazine (1876)
- [15] J.S. Russel: *Report on waves*, The British Association for the Advancement of Science, York (1844)
- [16] P.D. Lax: *Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves*, Communication on Pure and Applied Mathematics Vol. 21, p467-490, (1968)
- [17] R. Hirota: *Exact Solution of Korteweg de Vries Equation for multiple collisions of solitons*, The American Physical Society (1971)
- [18] L. Munteanu, S. Donescu: *Introduction to soliton theory: applications to mechanics*, Kluwer Academic Publishers (2004)