Proste wyprowadzenie transformacji Lorentza

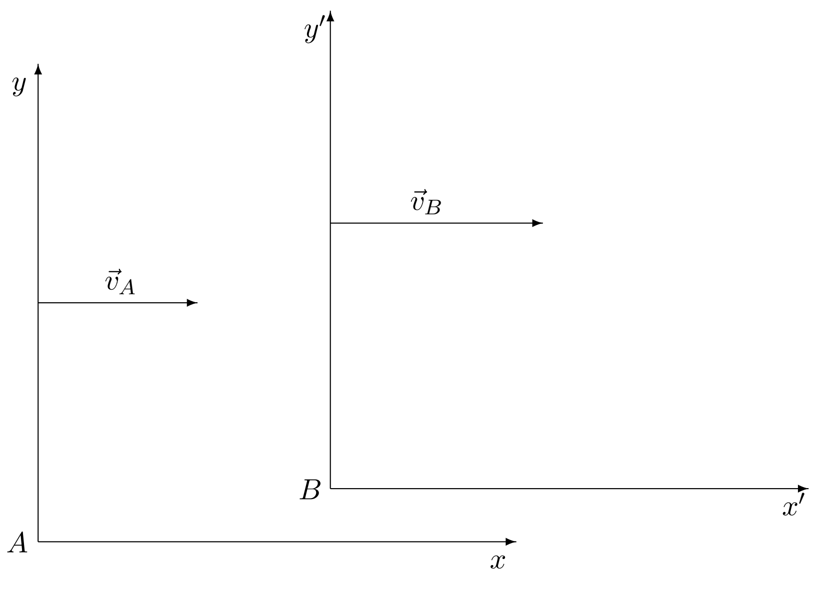
Bartłomiej Mrysz

20 marca 2011

Poniższe wyprowadzenie opiera się na postulatach Szczególnej Teorii Względności, które mówią, że:

1. Prawa fizyki są jednakowe niezależnie od wyboru inercjalnego układu odniesienia.
2. Dla każdego inercjalnego obserwatora światło w próżni porusza się ze stałą prędkością c niezależnie od kierunku.

Będziemy rozważać dwa układy A i B poruszające się z prędkościami v_A i v_B względem obserwatora pozostającego w spoczynku tak jak na Rysunku 1. Ponadto wprowadźmy v'_B jako prędkość układu B widzianą względem układu A. Żeby to lepiej zobrazować wyobraźmy sobie, że mamy dwa samochody A i B poruszające się z różnymi prędkościami v_A i v_B. Siedząc w samochodzie A widzimy samochód B jadący z prędkością v'_B.



Rysunek 1: Dwa inercjalne układy odniesienia poruszające się z prędkością v_A i v_B względem obserwatora pozostającego w spoczynku.

Na początku rozpatrzmy transformację Galileusza. Załóżmy, że ruch odbywa się tylko po współrzędnej x, więc dla pozostałych współrzędnych przestrzennych zajdzie równość $dy' = dy$ i $dz' = dz$. Przekształcenie Galileusza dla dx' i dt' będzie miało postać:

$$dx' = dx - v_A dt \tag{1}$$

$$dt' = dt \tag{2}$$

Dzieląc (1) przez (2) otrzymamy:

$$v'_B = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v_A \tag{3}$$

czyli

$$v'_B = v_B - v_A \tag{4}$$

Otrzymaliśmy prawo składania prędkości według transformacji Galileusza. Jednak ta transformacja nie jest poprawna, gdyż nie uwzględnia stałości prędkości światła. Ten postulat jest spełniony dopiero dla transformacji Lorentza. Zapiszmy ogólną postać transformacji w postaci:

$$dx' = Kdx + Ldt \tag{5}$$

$$dt' = Mdx + Ndt \tag{6}$$

gdzie K, L, M, N są nieznanymi współczynnikami, które trzeba znaleźć. Podzielmy teraz równanie (5) przez (6). Otrzymamy wyrażenie na prędkość v'_B:

$$v'_B = \frac{Kdx + Ldt}{Mdx + Ndt} \tag{7}$$

Wyciągając w liczniku i mianowniku dt przed nawias oraz uwzględniając $v_B = \frac{dx}{dt}$ dostaniemy:

$$v'_B = \frac{Kv_B + L}{Mv_B + N} \tag{8}$$

Rozpatrzmy teraz kilka przypadków w celu wyznaczenia nieznanych współczynników.

– Układ B jest w spoczynku ($v_B = 0$)

  Kiedy układ B jest w spoczynku, wtedy układ A widzi układ B poruszający się w przeciwnym kierunku z prędkością v_A:

$$v'_B = -v_A \tag{9}$$

  Wstawiając powyższe warunki do (8) otrzymamy:

$$L = -Nv_A \tag{10}$$

  Wstawiając powyższe wyrażenie do (8) wzór przekształci się do postaci:

$$v'_B = \frac{Kv_B - Nv_A}{Mv_B + N} \tag{11}$$

– Układ B porusza się z tą samą prędkością co A ($v_B = v_A$)

  Gdy oba układy poruszają się z tą samą prędkością i w tym samym kierunku, wtedy spoczywają względem siebie, więc zachodzi równość:

$$v'_B = 0 \tag{12}$$

  Uwzględniając powyższy wynik w równaniu (11) dostaniemy kolejne informacje o nieznanych współczynnikach:

$$N = K \tag{13}$$

Wtedy wzór (11) przekształci się do:

$$v'_B = K\frac{v_B - v_A}{Mv_B + K} \tag{14}$$

Gdybyśmy teraz założyli, że $M = 0$ to otrzymalibyśmy wzór na dodawanie prędkości w transformacji Galileusza (4). Jednak niezerowa wartość tego współczynnika sprawia, że transformacja Lorentza nie jest tożsama z transformacją Galileusza. Musi on być dobrany tak, żeby był spełniony postulat stałej prędkości światła w inercjalnym układzie odniesienia. Rozpatrzmy więc trzeci przypadek będący postulatem Szczególnej Teorii Względności.

– Układ B porusza się z prędkością światła $v_B = c$

Zgodnie z tym co powiedzieliśmy wcześniej w tym wypadku powinniśmy otrzymać:

$$v'_B = c \tag{15}$$

Po wstawieniu powyższej równości do (14) otrzymamy wartość współczynnika M w postaci:

$$M = -K\frac{v_A}{c^2} \tag{16}$$

Wstawiając go spowrotem do (14) dostaniemy:

$$v'_B = \frac{v_B - v_A}{1 - \frac{v_A v_B}{c^2}} \tag{17}$$

Otrzymaliśmy wzór na relatywistyczne składanie prędkości, ale naszym zadaniem jest wyznaczenie transformacji Lorentza, z której wynika owy wzór. Znamy postać wszystkich współczynników oprócz K. Wstawmy je więc do równań (5) i (6):

$$dx' = K(dx - v_A dt) \tag{18}$$

$$dt' = K(dt - \frac{v_A dx}{c^2}) \tag{19}$$

Do znalezienia pełnej postaci transformacji pozostało jeszcze wyznaczenie współczynnika K. W tym celu można skorzystać z pierwszego postulatu STW mówiącego, że prawa fizyki nie zmieniają swojej postaci przy przejściu z jednego do drugiego inercjalnego układu odniesienia. Oznacza to, że wraz ze zmianą układu zmieni się tylko znak przy prędkości na przeciwny oraz primowane wielkości zamienią się miejscami z nieprimowanymi. Stąd też prawdziwa jest transformacja w postaci:

$$dx = K'(dx' + v_A dt') \tag{20}$$

$$dt = K'(dt' + \frac{v_A dx'}{c^2}) \tag{21}$$

Wielkość K jest w najogólniejszym przypadku jakąś funkcją prędkości $K = K(v)$, więc K' będzie równa $K' = K(-v)$. Ze względu na pierwszy postulat STW musi w tym wypadku zachodzić równość:

$$K(v) = K(-v) \tag{22}$$

W przeciwnym razie transformacja Lorentza nie zachowuje niezmienniczości interwału czasoprzestrzennego, czyli zostaje złamana symetria względem układów inercjalnych. Wstawiając do (20) wzór (18) o (19) otrzymamy:

$$dx = K(Kdx - Kvdt + Kvdt - Kdx\frac{v^2}{c^2}) \tag{23}$$

Skracając wyrazy wyrażenie przekształci się do postaci:

$$1 = K^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) \tag{24}$$

Stąd współczynnik K jest równy:

$$K(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{25}$$

Mając już wyliczone wszystkie współczynniki oraz podstawiając $v_A = v$ otrzymamy transformację Lorentza:

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{26}$$

$$dt' = \frac{dt - \frac{vdx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{27}$$

oraz dla wielkości nieprimowanych:

$$dx = \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{28}$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{vdx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{29}$$