Rzut w polu grawitacyjnym

Bartłomiej Mrysz

19 marca 2011

1 Wyprowadzenie

Rzut w ziemskim polu grawitacyjnym jest to rzut w jednorodnym polu sił ciężkości o przyspieszeniu $g = 9.80655 \left[\frac{m}{s^2}\right]$. Podstawowymi wielkościami określającymi taki rzut jest prędkość początkowa v oraz kąt wyrzutu α. Ponadto ciało znajduje się w początkowym położeniu x_0, y_0 względem początku układu współrzędnych oraz pomijany jest opór ośrodka. Tak przygotowany układ ilustruje Rysunek 1.

Równania opisujące położenie w czasie rzutu w polu grawitacyjnym są następujące:

$$x(t) = x_0 + v_x t \tag{1}$$

$$y(t) = y_0 + v_y t - \frac{gt^2}{2} \tag{2}$$

oraz

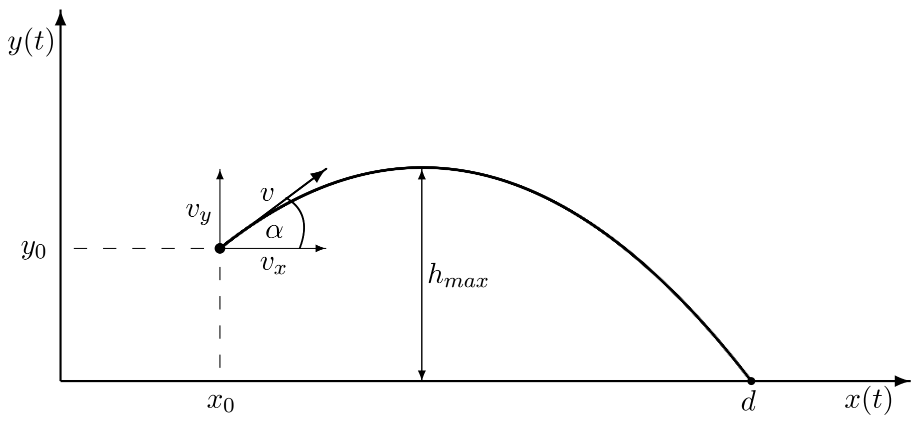
$$v_x = v \cdot \cos\alpha \tag{3}$$

$$v_y = v \cdot \sin\alpha \tag{4}$$

gdzie v jest prędkością początkową, α kątem nachylenia wektora prędkości, x_0, y_0 początkowym położeniem ciała.

Z tych równań można wyprowadzić trzy wielkości charakteryzujące rzut w polu grawitacyjnym:

- czas przelotu T
- zasięg rzutu d
- maksymalna wysokość na jaką wzniesie się ciało h_{max}



Rysunek 1: Wykres przedstawiający rzut ciała w jednorodnym polu grawitacyjnym.

W pierwszej kolejności wyznaczmy czas przelotu T. *Czas przelotu* jest to czas jaki upłynął od momentu wyrzutu do momentu spadnięcia na ziemię. Oznacza to, że zachodzi dla niego warunek:

$$y(T) = 0 \tag{5}$$

Korzystając z (2) otrzymamy:

$$y_0 + v_y T - \frac{gT^2}{2} = 0 \tag{6}$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe ze względu na T. Wyznaczmy *deltę* i poszukajmy rozwiązania równania (6):

$$\Delta = v_y^2 + 2gy_0 \tag{7}$$

$$T_{1,2} = \frac{v_y \pm \sqrt{v_y^2 + 2gy_0}}{g} \tag{8}$$

Możliwe jest tylko dodatnie rozwiązanie, więc uwzględniając (4) oraz podstawiając $y_0 = h$ otrzymamy ostatecznie:

$$T = \frac{v \sin\alpha + \sqrt{v^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g} \tag{9}$$

Następnie wyznaczmy *zasięg rzutu* d w polu grawitacyjnym. W ogólnym przypadku zasięg można wyznaczyć ze wzoru:

$$d = \int_0^T v_x dt \tag{10}$$

Ponieważ zaniedbujemy opór ośrodka, dlatego prędkość pozioma nie zmienia się w czasie i wzór na zasięg rzutu przyjmuje postać:

$$d = x_0 + v_x T \tag{11}$$

Podstawiając do powyższego wzoru (3) i (9) otrzymamy ostatecznie:

$$d = x_0 + v\cos\alpha \frac{v \sin\alpha + \sqrt{v^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g} \tag{12}$$

Ostania wielkość charakteryzująca rzut to *maksymalna wysokość* h_{max} na jaką wzniesie się ciało. W tym celu skorzystajmy z rachunku różniczkowego i wyliczmy maksimum funkcji $y(t)$. Różniczkując (2) względem t i przyrównując wynik do zera wyznaczmy t_{max} czyli czas, w którym ciało jest w najwyższym punkcie rzutu. Z równania:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0 \tag{13}$$

otrzymamy:

$$v_y - gt_{max} = 0 \tag{14}$$

stąd czas, w którym ciało osiągnie maksymalną wysokość wynosi:

$$t_{max} = \frac{v_y}{g} \tag{15}$$

Następnie wstawiając (15) do (2) otrzymamy:

$$h_{max} = y(t_{max}) = h + \frac{v_y^2}{2g} \tag{16}$$

Uwzględniając (4) dostaniemy końcowy wzór:

$$h_{max} = h + \frac{v^2}{2g}\sin^2\alpha \tag{17}$$

Istnieje jeszcze jeden parametr charakteryzujący rzut, którym jest *prędkość końcowa* v_k. Do wyznaczenia prędkości końcowej powinniśmy znaleźć zależność składowych prędkości od czasu. W tym celu wyznaczmy pochodne (1), (2):

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v_x \tag{18}$$

$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = v_y - gt \tag{19}$$

I prędkość całkowita jest równa:

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = \sqrt{v_x^2 + (v_y - gt)^2} \tag{20}$$

Prędkość końcowa jest to prędkość ciała w czasie zetknięcia się z ziemią, czyli:

$$v_k = v(T) = \sqrt{v_x^2 + (v_y^2 - gT)^2} \tag{21}$$

Wstawiając (9) do powyższego równania oraz zamieniając $v\sin\alpha = v_y$ otrzymamy:

$$v_k = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + 2gh} \tag{22}$$

czyli:

$$v_k = \sqrt{v^2 + 2gh} \tag{23}$$

Otrzymaliśmy wzór na prędkość końcową. Jak widać nie zależy ona od kąta nachylenia tylko od prędkości początkowej i wysokości. W przypadku gdy $h = 0$, wartość prędkości końcowej jest zawsze równa wartości prędkości początkowej.

Ostatnią rzeczą, o której warto powiedzieć jest równanie na tor w polu grawitacyjnym. Jeśli wyznaczymy czas ze wzoru (1):

$$t = \frac{x - x_0}{v_x} \tag{24}$$

i wstawimy go do (2) to otrzymamy funkcję, której wykresem jest tor rzuconego ciała w jednorodnym polu grawitacyjnym:

$$y(x) = y_0 + \operatorname{tg}\alpha(x - x_0) - \frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}(x - x_0)^2 \tag{25}$$

Podsumowując wielkości charakteryzujące rzu w polu grawitacyjnym, które otrzymaliśmy na bazie równań ruchu (1), (2), (3), (4) są następujące:

– czas przelotu

$$T = \frac{v\sin\alpha + \sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2gh}}{g} \tag{26}$$

– zasięg rzutu

$$d = x_0 + v\cos\alpha\frac{v\sin\alpha + \sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2gh}}{g} \tag{27}$$

– maksymalna wysokość

$$h_{max} = h + \frac{v^2}{2g}\sin^2\alpha \tag{28}$$

– prędkość końcowa

$$v_k = \sqrt{v^2 + 2gh} \tag{29}$$

– tor ciała rzuconego w polu grawitacyjnym

$$y(x) = y_0 + \operatorname{tg}\alpha(x - x_0) - \frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}(x - x_0)^2 \tag{30}$$

Są to wzory na przypadek ogólny, w którym ciało znajduje się na wysokości h i zostało wyrzucone pod kątem α z prędkością v.